

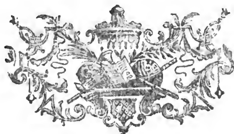


DEGLI ARCHI
E
DELLE VOLTE
LIBRI SEI

DI

LEONARDO SALIMBENI

Capitano Ingegnere, Professore di Matematica e delle Fortificazioni nel Collegio Militare, e de' Quaranta della Società Italiana.



IN VERONA

PER DIONIGI RAMANZINI

MDCCLXXXVII.

Itaque Architecti, qui sine litteris contenderunt, ut manibus essent exercitati, non potuerunt efficere, ut haberent pro laboribus auctoritatem. Qui autem ratiocinationibus & litteris solis confisi fuerunt, umbram non rem persequuti videntur. Vitr. Cap. I.

AGLI AMPLISSIMI SENATORI

ANDREA QUERINI
ZACCARIA VALLARESSO
FRANCESCO PESARO K.R P.R

RIFORMATORI DELLO STUDIO DI PADOVA

LEONARDO SALIMBENI.



SE io riguardo quali e quante pellegrine virtù adornino l' animo vostro, Eccellentissimi Signori, e quanto siate di tutte le bell' arti e più profonde scienze veri conoscitori, m' avveggo di essere troppo ardito col dedicarvi quest' opera mia; ma se considero all' opposito Voi di singolare bontà ripieni, e delle lettere Promotori e Mecenati amplissimi, trovo di averla collocata in quel luogo che più le si conveniva: imperciocchè quando essa per avventura ritrovamenti

contenesse meritevoli della vostra approvazione, Voi la sapreste proteggere e sollevare; e la soffrireste eziandio se fosse men che degna, giacchè siete soliti d' animare gli autori sì mediocri che sublimi, questi in ricompensa delle loro onorate fatiche, quelli per incamminarli a lodevoli imprese. Per la qual cosa io prendo cuore ad offerirvi questi sei Libri degli Archi e delle Volte, *argomento nobile del pari e difficile, maneggiato da me in guisa che la teoria dalla pratica, e questa da quella, riceva a vicenda maggior sostentamento e chiarezza.*

Quando la Matematica non rivolge la mira ad oggetti di pubblica utilità, infruttuose si rimangono le sue scoperte, non servendo che a pascere la speculativa di pochi: ma se al contrario succeda, non può dirsi quanto illumini quella Scienza la pratica, ed oltre i confini la spinga, a' quali per se medesima non sarebbe pervenuta giammai. Questo ho io tentato di fare, impiegando la teoria in una parte dell' Architettura ch' è di tanto uso, poichè non v' è quasi edifizio nè pubblico, nè privato, nè civile, nè militare, in cui non si trovino Archi o Volte: ma se vi sia riuscito, lo giudicheranno i dotti, lo giudicherete Voi, che alla nobiltà del sangue, e alla celebrità della fama acquistata negl' importantissimi impieghi sostenuti in Patria, o fuori, accoppiate, come io rammemoro con rispetto, maturo giudizio e fino discernimento.

Verona il dì primo Agosto 1787.

PREFAZIONE.

IN due ſtati ſi vogliono conſiderare gli Archi e le Volte, cioè a dire, quando ſi fabbricano ſopra le centine, e quando dopo fabbricati ſi diſarmano delle centine medeſime, ſtati che fra loro di molto differiſcono, e varj argomenti preſentano alle ricerche de' Matematici, ed Architetti. Del primo ſtato, che io mi ſappia, non trovaſi nulla di ſcritto, fuor ſolamente una ſemplice proprietà ſcoperta da *Couplet* nelle Volte e negli Archi interi circolari: del ſecondo all' incontro trattarono aſſai valent' uomini, *de la Hire*, *Couplet*, *Belidor* ed altri, e ultimamente il non mai abbaſtanza celebrato Sig. Brigadier *Lorgna*, e il chiariſſimo Sig. Profeſſor *Maſcheroni* di Pavia. Io mi progongo di verſare ſopra ambedue queſti ſtati degli Archi e delle Volte, non ſupponendo nè gli uni nè l' altre di quella forma ch' eſigerebbe il calcolo per ſerbare ne' cunei certi equilibrj, ma piuttoſto di quella che lor danno gli Architetti, che trovata prima in ogni edifizio la più acconcia ſimmetria delle parti in ordine principalmente alle regole della proſpettiva, v' adattano poi ſecondo l' uopo le forze e le reſiſtenze. Per giugner al mio intento muovo da alcuni principj di *Couplet*, battendo però una ſtrada differente, che mi conduce a nuove ed importanti verità; ed ho meſtieri di partire tutta l' opera in ſei Libri.

Dopo di aver diſcuſſe nel primo Libro alcune propoſizioni fondamentali di queſta materia, paſſo nel ſecondo ad eſaminare la preſſione de' cunei ſulle centine degli Archi circolari, ſieno interi, ſieno ſcemi, o a ſeſto acuto, e formati di un numero qualſivoglia finito di cunei, o veramente infinito; e cerco di poi i loro punti d' equilibrio, cioè dove comincino a naſcere gli sfiancamenti; procedendo ſempre con metodo ſintetico, e col calcolo finito. Nel terzo dimoſtro per ſimil guiſa, come, dopo levate le centine, agiſcano le gravità de' cunei sì fra loro, e sì contro a' pilaſtri degli Archi pure circolari. Le indagini da me fatte nel ſecondo e nel terzo Libro intorno agli Archi circolari eſtendo ne'

due susseguenti agli Archi di qualsisia interiore ed esterior curvatura, di modo che il quarto corrisponde al secondo, e suppone per anche i cunei sopra le centine; e al terzo corrisponde il quinto, e s' intendono gli Archi delle lor centine disarmati. In questi due Libri però non posso far senza del calcolo infinitesimale e del metodo analitico, ma non ommetto impertanto di dimostrare cogli esempli applicati agli Archi in ispecie circolari, essere i loro risultamenti affatto uniformi a' ritrovati ne' due Libri innanzi, quando si supponeva infinito il numero de' cunei, e infinitesimo di grandezza ogni cuneo onde l' Arco è composto, il che serve pur anche a' tanti miei calcoli di prova. Applico nel sesto ed ultimo Libro la teoria degli Archi a due specie di Volte, a quelle che si dicono a mezza botte, caricate da qualsivoglia scala di pesi, ed alle cupole, proponendo la risoluzione di diversi pratici problemi, i quali mostrano ad evidenza l' accordo, sì strettamente che nulla più, fra la teoria e la pratica.

PROSPETTO DELL' OPERA.

LIBRO PRIMO.

LIBRO SECONDO.

LIBRO TERZO.

LIBRO QUARTO.

LIBRO QUINTO.

LIBRO SESTO.

LIBRO PRIMO

PRINCIPJ DELLA TEORIA DEGLI ARCHI E DELLE VOLTE.

Diffinizioni.

I.

ARco propriamente ſi chiama dagli Architetti quella copertura de' vani, che abbia figura curvilinea.

II.

Pilaſtri dell' Arco ſono quella ſpecie di colonne ſulle quali poſano gli Archi, e che loro ſervono di ſoſtegno.

III.

Gli Archi ſono circolari, elittici, iperbolici ecc. ſecondo la natura del loro interiore incurvamento; ma quando non ſi aggiugne loro alcun nome dinotante determinata curvatura, s' intende ſempre parlare di Archi circolari.

IV.

Siccome di rado o non mai ſi poſſono far gli Archi di un pezzo ſolo, così ſi compongo-

no mediante il congiungimento di più pezzi insieme, che si sostengono vicendevolmente, e che vengono chiamati Cunei o Conj.

V.

Que' cunei dell' Arco, che da una parte e dall' altra stanno abbasso appoggiati su i pilastri, si dicono con nome particolare Mosse.

VI.

I conj poi dell' Arco si sogliono fare di numero impari, affine di poter mettere di sopra nel rigoglio un conio, che si chiama Serraglio, il quale serra e unisce tutti i conj che compongono l' Arco.

VII.

Impostatura degli Archi è quel luogo appunto dove posano gli Archi.

VIII.

Centina è l' armadura di legname sopra la quale si fabbricano gli Archi, e che serve di mezzo per congiugnere insieme tutti i cunei. Questi congiunti, si toglie affatto dall' Arco la centina.

IX.

Ma degli Archi circolari Arco intero o a tutto ſeſto è quello, che rappreſenta nella faccia la metà dello ſpazio compreſo tra due cerchj concentrici, e che ha la ſaetta uguale alla metà della corda.

X.

Arco ſcemo è quello che rappreſenta una parte minore della metà dello ſpazio compreſo fra due cerchj concentrici, e che ha la ſaetta minore della metà della corda.

XI.

Arco compoſto o a ſeſto acuto è quello che rappreſenta due archi ſcemi, i quali hanno i loro centri nella corda dell' Arco, e fra di loro ſcambievolmente ſi ſegano.

XII.

Similmente negli Archi circolari Raggio interiore ſi dice la linea, che partendo dal centro dell' Arco va fino ad un punto preſo nella circonferenza interiore.

XIII.

E Raggio eſteriore s' intende eſſere la linea,

che dal centro dell' Arco ſi conduce ad un punto della circonferenza eſteriore.

XIV.

Si chiama ancora, benchè impropriamente, dagli Architetti Arco piano quella copertura, che ſi diſtende in linea retta fra le ſue impoſtature.

XV.

Sfiancamento di un cuneo ſi chiamerà quella forza, quando vi ſia, la quale cerca diſgiugnere il cuneo dai contigui e cacciarlo fuori dell' Arco.

XVI.

Forza o ſpinta relativa di un cuneo è quella forza con cui eſſo preme il cuneo inferiore ſecondo una direzione alla loro comune commeſſura perpendicolare. E ſpinta relativa della moſſa è quella forza che ſimilmente impiega la moſſa contro l' impoſtatura dell' Arco.

XVII.

Punto d' equilibrio in un Arco, a cui ſta ancora ſottopoſta la centina, è quel punto della centina ſul qual poggia un cuneo, che nè preme la centina, nè sfianca.

DOMANDE.

I.

CHe tutti i cunei componenti un Arco non sieno legati fra di loro con calce, nè vi sia alcun soffregamento nelle commessure, ma che liberi e levigatissimi gravitino col loro proprio peso, vicendevolmente premendosi.

II.

Che tutti i conj componenti un Arco circolare sieno uguali e simili fra di loro, eccettochè il serraglio dell' Arco composto, che debbe necessariamente avere una forma differente dagli altri.

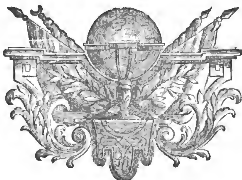
III.

Che i pilastri sieno fatti di un pezzo solo, e talmente collocati colla loro base sulle fondamenta, che non possano essere mossi che d' intorno alle linee esterne della base medesima.

IV.

Che sia permesso di supporre adattate esternamente da ambe le parti di un Arco di qualsivoglia curvatura, dalle impostature in su,

due ſopraccentine , le quali ſieno attaccate fermamente a' pilaſtri, e ſecondino la forma eſteriore dell' Arco , per quel tratto che ſi determinerà a ſuo luogo, dove ſi renderà anche ragione della fatta domanda.



PROBLEMA I. PROPOSIZIONE I.

COstruire una figura, che indichi un Arco intero, composto di un dato numero di cunei, di cui sia data la corda, la grossezza, e la larghezza.

Debba essere la corda dell' Arco uguale alla linea *K*, la grossezza uguale alla *H*; *I* poi indichi la sua larghezza, e sia proposto farlo di cinque cunei. Fig. I. Tav. I.

Si esponga una retta orizzontale *AB* uguale alla *K*, e divisa per mezzo la *AB* in *C*, si descriva il semicerchio *ADB*; indi si facciano le *AE BF* uguali alla *H*, e col centro medesimo *C* e coll' intervallo di una delle *CE CF* si descriva l' altro semicerchio *EMF*. Di nuovo si divida la circonferenza interiore *ADB* in cinque parti uguali, e condotte dai punti delle divisioni linee rette al centro, si prolunghino finchè interséchino la circonferenza esteriore *EMF*; e tutta la superficie *EMFBDA* mostrerà la faccia dell' Arco intero diviso in cinque cunei, di cui li due *EG SF* dinoteranno le mosse, e quel di mezzo *aQ* sarà il serraglio. Dif. 9

E se alla superficie *EMFBDA* si aggiugnerà la dimensione *FT* ad angoli retti, la qual sia uguale alla larghezza *I* dell' Arco, di modo che *AP* sia il solido prodotto dal movimento del piano *EMFBDA* parallelo a se stesso e per la direzione *FT*, si sarà costruita la figura dell' Arco a tutto sesto, e le inclinate superficie *TbGc NO PQ RS*, che indicano le commessure de' conj, prolungate concorreranno nella retta *CZ* uguale e parallela a *FT*, e però ad angoli retti, anch' essa, al piano medesimo *EMFBDA*; il che ecc.

S c o l i o.

E' chiaro, che la risoluzione del Problema presente richiede di poter dividere la semicirconferenza di un cerchio in quante parti uguali si vogliano di numero impari, il che quantunque sia quasi sempre superiore alle forze della Geometria, ciò nulla ostante si può far praticamente usando il compasso o qualche altro strumento, e

si possono determinare i punti delle divisioni col mezzo di formole trigonometriche.

PROBLEMA 2. PROPOSIZIONE 2.

Data la corda, la saetta, e la grossezza di un Arco scemo, non meno che la larghezza e il numero de' cunei, costruire la figura.

Fig. II. Tav. I. Sia la corda dell'Arco scemo uguale alla linea *K*, la saetta uguale a *L*, che sarà minore della metà della *K*; l' Arco
Dif. 10 poi debba essere grosso quanto *H*, e largo quanto *I*; e sia proposto farlo di nove cunei.

Si esponga la retta orizzontale *AB* uguale alla *K*, e divisa per mezzo la *AB* nel punto *G* si conduca la *GC* ad angoli retti alla *AB* ed uguale alla *L*; indi per li punti *A C B* si faccia passare un segamento minore di cerchio, il cui centro *E* sarà nella *CG* prolungata, e si tirino le *EAD EBM*. Di nuovo si prendano le *AD BM* uguali alla grossezza *H* dell' Arco, e col centro *E* ed intervallo della *ED* si descriva l'altro segamento *DOM*; indi divisa la circonferenza interiore in nove parti uguali, e dai punti delle divisioni conducendo
Dif. 10 rette linee al centro *E*, dipoi prolungandole finchè incontrino la circonferenza esteriore *DOM*, sarà descritta la faccia dell' Arco scemo e de' suoi cunei.

E se finalmente al piano *DOMBCA* sarà aggiunta ad angoli retti un'altra dimensione *MN* uguale alla larghezza *I* dell' Arco, sarà descritta la figura solida *AR* dinotante l' Arco scemo, e le superficie inclinate de' cunei, o le loro commessure, concorreranno nella retta *EF* parallela ed uguale alla *MN*; il che ecc.

PROBLEMA 3. PROPOSIZIONE 3.

Data la corda, la saetta, e la grossezza di un Arco composto, insieme colla larghezza e col numero de' conj, costruire la figura.

Debba

Debba eſſere la corda dell' Arco uguale alla linea *K*, la ſaetta uguale alla *L*, la groſſezza uguale a *H*, la larghezza uguale a *I*, e ſia propoſto di formarlo con tredici cunei. Fig. III. Tav. I.

Eſpongaſi la retta orizzontale *AB* uguale alla corda *K*, e ſi divida per mezzo nel punto *D*, da cui ſi conduca la *DC* ad angoli retti alla *AB* ed uguale alla ſaetta *L*: poſcia ſi congiunga la *AC* e ſi ſeghi per mezzo e ad angoli retti colla *OE*, che interſechi la corda nel punto *E*; e fatto centro in *E* coll' intervallo di una delle *EA EC* ſi deſcriva l' arco *AC*. Lo ſteſſo ſi faccia dall' altra parte deſcrivendo col centro *F* l' arco *BC*, e ad amendue ſi aſſegnino le groſſezze *AQ BR* uguali alla *H*. Di nuovo ſi dividano le circonferenze interiori *AC BC* in ſei parti uguali, e dai punti delle diviſioni ſi tirino linee rette ai riſpettivi loro centri *E F*, e ſi prolunghino finchè incontrino le circonferenze eſteriori *QP RP*, e ſarà deſcritta la faccia dell' Arco compoſto; alla quale aggiugnendo la dimenſione *RZ* ad angoli retti al piano *QPRBCA* e uguale a *I*, ſi compirà la figura ſolida dell' Arco diviſo in tredici cunei, le di cui commeſſure concorreranno nelle rette *EH FG* uguali e parallele alla *RZ*; il che ecc. Dif. 12

COROLLARIO.

E perchè l' Arco compoſto debbe avere i centri de' due Archi ſcemi, che lo compongono, nella corda *AB*, uno di eſſi *E* o cadrà in *B*, o tra *B* e *D*. Nel primo caſo ſarà la corda *AB* uguale alla *BC*, e il triangolo *ABC* equilatero: ma nel ſecondo caſo (ch' è appunto l' eſpreſſo nella figura) eſſendo la *CE* uguale alla *EA*, poſta comune la *EB*, ſaranno le due *CE EB* uguali alla *AB*; le due poi *CE EB* ſono maggiori della *BC*; dunque anche la *AB* ſarà in queſto ſecondo caſo maggiore della *BC*: quindi unendo inſieme i due caſi, ſi potrà ſempre dire, che in un Arco compoſto la corda *AB* non ha mai da eſſere minore della retta *BC*, che congiugne il rigoglio *C* dell' Arco con un' eſtremità *B* della corda; e queſto è un limite a cui biſogna aver riguardo nell' aſſegnare la ſaetta di un Arco compoſto. Dif. 13

PROBLEMA 4. PROPOSIZIONE 4.

Costruire la figura di un Arco piano, del quale sia data la corda, la grossezza, la larghezza, e il numero de' cunei.

Fig. XIV. Tav. I. Sia l'orizzontale *AB* la corda dell'Arco piano; e si divida la *AB* in tante parti uguali quanti cunei si vogliono nell' Arco, per esempio in sette. Dipoi si seghi la *AB* per mezzo nel punto *E*, dal quale si conduca la *ED* ad angoli retti alla *AB*, e nella *ED* si prenda qualsisia punto *D*; indi si tiri la *CG* parallela alla *AB* ad una distanza *EF* uguale alla grossezza, che all' Arco piano dee darsi; e finalmente dai punti di divisione *A m K L N g b B* della corda si tirino linee rette al punto *D*, che prolungate fino alla *CG* somministreranno le commessure de' cunei, e la figura *CABG* dinoterà la faccia dell'Arco piano, a cui aggiugnendo la dimensione della larghezza, s' avrà la figura intera dell' Arco medesimo; il che ecc. Dif. 14.

S c o l i o.

In altro modo si può costruire l' Arco piano, come vedesi ne' libri d' Architettura, ch' è inutile di trascrivere in questo luogo. Basti sapere che d' ordinario si prende il punto D *per modo che* ADB *sia un triangolo equilatero.*

PROBLEMA 5. PROPOSIZIONE 5.

A una figura qualsivoglia, dinotante Arco circolare o Arco piano, aggiugnere la costruzione de' pilastri, de' quali sia data l' altezza e la grossezza.

Fig. I. Tav. I. Sia primieramente l' Arco intero *AP*, e *A B* sieno i punti primi dell' impostatura. Si conduca pertanto dal punto *A* la *AW* ad angoli retti alla *AB* ed uguale all'altezza, che

debbe avere il pilaſtro: poi ſi faccia la *WX* uguale alla groſſezza del pilaſtro medeſimo e parallela alla *AB*, e ſi compia il rettangolo *AX*, che indicherà la faccia del pilaſtro, a cui aggiugnendo la dimenſione *AÆ* uguale alla larghezza ſteſſa dell' Arco, ſarà coſtruita tutta la figura ſolida di un pilaſtro; e lo ſteſſo ſi faccia all' altra impoſtatura *B*.

Ma in ſecondo luogo, ſe l' Arco ſia ſcemo, preſe le *AW* *WX* uguali all' altezza e alla groſſezza del pilaſtro, conviene condurre dal punto *X* la *XV* parallela alla *AW*, e dal punto *D* la *DV* parallela alla *AB* per avere la faccia del pilaſtro, al quale ſi aſſegnerà, come prima, una larghezza *AÆ* uguale alla larghezza dell' Arco ſcemo; e lo ſteſſo ſi farà dall' altra parte. Fig. II. Tav. I.

I pilaſtri degli Archi compoſti ſi coſtruiſcono come quelli degl' interi, e quelli degli Archi piani come i pilaſtri de' ſcemi: per altro trovandoſi alle volte alcuni Archi, che ſporgono di dentro uſcendo del piombo de' loro pilaſtri, s' è voluto rappreſentarli nella *Fig. III.* il che rieſce facile quando ſia dato l' aggetto *AT*; e però ecc. Fig. III. e XIV. Tav. I.

S C O L I O.

S' è fatta la larghezza del pilaſtro uguale alla larghezza dell' Arco, perchè così ſi uſa ordinariamente; ma volendo che ſia maggiore, baſta collocare la differenza metà per parte affinchè l' Arco impoſti nel mezzo della larghezza del pilaſtro medeſimo.

PROBLEMA 6. PROPOSIZIONE 6.

Trovare il centro di gravità della ſuperficie piana *ABCFRE* compreſa da due parti *ABC* *ERF* di circonferenze, che hanno lo ſteſſo centro *D*, e dalle rette *AE* *CF* dirette al centro medeſimo. Fig. IV. Tav. I.

Si prenda il centro di gravità *G* del ſettore *ADC*, e il centro di gravità *H* dell' altro ſettore *EDF*, i quali centri di gravità cadranno nella retta *DB*, che divide per mezzo

l' angolo ADC: indi si faccia come la superficie $ABCFRE$ al settore EDF, così reciprocamente la HG alla GI, sarà il punto I centro di gravità della superficie $ABCFRE$ per le cose che si dimostrano nella Statica.

Sia pertanto il raggio maggiore $DA = c$, il minore $DE = b$, r il raggio delle Tavole, e sia l' angolo $ADC = 2\mu$; ovvero 2μ indichi l' arco, che nel cerchio del raggio r corrisponde all' angolo ADC; e si congiungano le corde AC EF.

E perchè la distanza del centro di gravità di un settore dal centro del cerchio è subsesquialtera della quarta proporzionale tra l'arco, che gli serve di base, la corda, e il raggio, sarà la $DH = \frac{2.EF.DE}{3.ERF}$, e similmente $DG = \frac{2.AC.DA}{3.ABC}$. Ora nel triangolo rettangolo ADL essendo dato l' angolo $ADL = \mu$, e la $AD = c$, si troverà $AL = \frac{c\,.\,\text{sen.}\,\mu}{r}$, e però la corda $AC = \frac{2c\,.\,\text{sen.}\,\mu}{r}$: nella stessa guisa si troverà la corda $EF = \frac{2b\,.\,\text{sen.}\,\mu}{r}$. Di nuovo perchè come il raggio r al raggio DA, così è l' arco 2μ all' arco ABC, sarà l' arco $ABC = \frac{2c\mu}{r}$; e per la stessa ragione sarà l' arco $ERF = \frac{2b\mu}{r}$. Per la qual cosa sostituendo nell' espressioni di DG DH i valori ritrovati, si avrà $DH = \left(\frac{4b\,.\,\text{sen.}\,\mu}{r}\,.\,b\right) : \frac{6b\mu}{r} = \frac{2b\,.\,\text{sen.}\,\mu}{3\mu}$, e $DG = \left(\frac{4c\,.\,\text{sen.}\,\mu}{r}\,.\,c\right) : \frac{6c\mu}{r} = \frac{2c\,.\,\text{sen.}\,\mu}{3\mu}$; e però la rimanente $HG = \frac{2c\,.\,\text{sen.}\,\mu}{3\mu} - \frac{2b\,.\,\text{sen.}\,\mu}{3\mu} = \frac{2(c-b)\,.\,\text{sen.}\,\mu}{3\mu}$.

Oltre a ciò perchè il settore $DAC = ABC\,.\,\frac{DA}{2} = \frac{2c\mu}{r}\,.\,\frac{c}{2} = \frac{c^2\mu}{r}$, e il settore $EDF = ERF\,.\,\frac{DE}{2} = \frac{2b\mu}{r}\,.\,\frac{b}{2} = \frac{b^2\mu}{r}$, sarà la rimanente superficie $ABCFRE = \frac{c^2\mu}{r} - \frac{b^2\mu}{r} = \frac{\mu(c^2-b^2)}{r}$;

ficchè essendo come la superficie medesima $ABCFRE$ al settore EDF, così la HG alla GI, ovvero $\frac{\mu(c^2 - b^2)}{r} : \frac{b^2\mu}{r} ::$ $\frac{2(c-b) . \text{sen.} \mu}{3\mu} : GI$, farà $GI = \frac{2b^2(c-b) . \text{sen.} \mu}{3\mu(c^2 - b^2)} = \frac{2b^2 . \text{sen.} \mu}{3\mu(c+b)}$.
S' è poi dimostrata la $DG = \frac{2c . \text{sen.} \mu}{3\mu}$, dunque tutta la DI $= \frac{2c . \text{sen.} \mu}{3\mu} + \frac{2b^2 . \text{sen.} \mu}{3\mu(c+b)} = \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c+b)} . \frac{\text{sen.} \mu}{\mu}$; e così farà determinata la distanza tra il centro di gravità I della superficie $ABCFRE$ e il centro D delle circonferenze ABC ERF; il che ecc.

COROLLARIO I.

Quindi la superficie $ABCFRE = \frac{\mu(c^2 - b^2)}{r}$, dove c dinota il raggio della circonferenza maggiore, b il raggio della minore, r il raggio delle Tavole, e μ la metà dell' arco, che nel cerchio del raggio r corrisponde all' angolo ADC.

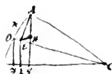
COROLLARIO II.

Per conseguenza se l' angolo ADC, ovvero l' arco 2μ sia una quantità infinitesima, farà ancora $\mu = \text{sen.} \mu$, onde la sopraddetta distanza DI diventerà in questo caso medesimo $= \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c+b)}$; e chiamata $AE = g$, ficchè $c = b + g$, farà $DI = \frac{2b^2 + 4bg + 2g^2 + 2b^2 + 2bg + 2b^2}{3(2b + g)}$ $= \frac{6b^2 + 6bg + 2g^2}{3(2b + g)}$.

PROBLEMA 7. PROPOSIZIONE 7.

Presentare tutte l' espressioni generali del calcolo de' seni e coseni, di cui s' avrà mag-

gior uopo nel corso di quest' Opera, onde facilitare l' intendimento de' calcoli.



Si dimostrano nell' analisi, se π φ sieno due archi quali si vogliano presi nel cerchio del raggio $= r$, di cui π sia il maggiore e φ il minore, si dimostrano, dico, le seguenti equazioni.

$$\text{I. } \operatorname{sen.}(\pi + \varphi) = \frac{\operatorname{sen.}\pi \cdot \cos.\varphi}{r} + \frac{\cos.\pi \cdot \operatorname{sen.}\varphi}{r}$$

$$\text{II. } \operatorname{sen.}(\pi - \varphi) = \frac{\operatorname{sen.}\pi \cdot \cos.\varphi}{r} - \frac{\cos.\pi \cdot \operatorname{sen.}\varphi}{r}$$

$$\text{III. } \cos.(\pi + \varphi) = \frac{\cos.\pi \cdot \cos.\varphi}{r} - \frac{\operatorname{sen.}\pi \cdot \operatorname{sen.}\varphi}{r}$$

$$\text{IV. } \cos.(\pi - \varphi) = \frac{\cos.\pi \cdot \cos.\varphi}{r} + \frac{\operatorname{sen.}\pi \cdot \operatorname{sen.}\varphi}{r}$$

dalle quali quattro equazioni se ne possono ricavare altrettante sommando prima, poi sottraendo fra di loro le due prime, poscia facendo lo stesso delle susseguenti. Sarà pertanto.

$$\text{V. } \operatorname{sen.}(\pi + \varphi) + \operatorname{sen.}(\pi - \varphi) = \frac{2 \cdot \operatorname{sen.}\pi \cdot \cos.\varphi}{r}$$

$$\text{VI. } \operatorname{sen.}(\pi + \varphi) - \operatorname{sen.}(\pi - \varphi) = \frac{2 \cdot \cos.\pi \cdot \operatorname{sen.}\varphi}{r}$$

$$\text{VII. } \cos.(\pi + \varphi) + \cos.(\pi - \varphi) = \frac{2 \cdot \cos.\pi \cdot \cos.\varphi}{r}$$

$$\text{VIII. } \cos.(\pi - \varphi) - \cos.(\pi + \varphi) = \frac{2 \cdot \operatorname{sen.}\pi \cdot \operatorname{sen.}\varphi}{r}$$

Similmente fatto nella terza equazione $\varphi = \pi$ si conseguirà $\cos. 2\pi = \frac{(\cos.\pi)^2}{r} - \frac{(\operatorname{sen.}\pi)^2}{r}$: ma $r^2 = (\operatorname{sen.}\pi)^2 + (\cos.\pi)^2$; dunque avremo altre due equazioni sommando e sottraendo

$$\text{IX. } r \cdot \cos. 2\pi = r^2 - 2 \cdot (\operatorname{sen.}\pi)^2$$

$$\text{X. } r \cdot \cos. 2\pi = 2 \cdot (\cos.\pi)^2 - r^2$$

Quando però nel corſo dell' Opera vorraſſi cita re una di queſte dieci equazioni, ſi darà loro il nome di equ azione prima, ſeconda, terza ecc. come ſono marcate da' num eri romani in queſto luogo.

PROBLEMA 8. PROPOSIZIONE 8.

Ritrovare la ſomma generale della ſerie (*A*) sen. d, sen. $(d+b)$, sen. $(d+2b)$ ecc......... sen. $(d+nb)$; e dell' altra ſerie (*B*) cos. d, cos. $(d+b)$, cos. $(d+2b)$ ecc.... cos. $(d+nb)$, nelle quali $n+1$ indica il numero de' termini.

La prima ſerie (*A*) sen. d, sen. $(d+b)$, sen. $(d+2b)$ ecc..... sen. $(d+nb)$ ſommata dall' *Eulero . Introductio in Anal. infin. Tom.* 1. *n.°* 259 dà per ſomma generale

$$\frac{\text{sen.}\left(d+\frac{1}{2}nb\right).\text{sen.}\,(n+1)\frac{b}{2}}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}b}$$

; la ſeconda poi (*B*) cos. d, cos. $(d+b)$, cos. $(d+2b)$ ecc..... cos. $(d+nb)$ ſommata al numero ſuſſeguente 260 dà per ſomma generale

$$\frac{\text{cos.}\left(d+\frac{1}{2}nb\right).\text{sen.}\,(n+1)\frac{b}{2}}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}b}$$

; dunque ecc.

COROLLARIO.

Dimandiſi per eſempio un numero di termini q della ſerie cos. $(2x+1)\mu$, cos. $(2x-1)\mu$, cos. $(2x-3)\mu$ ecc. Si faccia $d=(2x+1)\mu$, $b=-2\mu$, e $q=n+1$, onde $n=q-1$: ſarà, ſoſtituendo, la ſomma ricercata

$$=\frac{\text{cos.}\,(2x\mu+\mu-q\mu+\mu).\,\text{sen.}-q\mu}{\text{sen.}-\mu}$$

$$=\frac{\text{cos.}\,(2x-q+2)\mu\,.\,\text{sen.}\,q\mu}{\text{sen.}\,\mu}.$$

PROBLEMA 9. PROPOSIZIONE 9.

Ritrovare il centro di gravità di uno de' cunei componenti un Arco circolare, purchè non sia il serraglio dell' Arco composto.

Fig. V. Tav. I. Sia *BP* un conio di Arco circolare, non però il serraglio dell' Arco composto, e s' intenda prodotto il conio *BP* dal movimento parallelo della superficie *ABCO* per la direzione *BF* ad essa perpendicolare. Sia poi *D* il centro delle circonferenze concentriche *AB OC*, e *G* centro dell' opposte *EF PQ*, cosicchè la linea *DG* che unisce i punti *D G* sia uguale e parallela alla *BF*, e insieme colla *BF* perpendicolare ai piani de' triangoli *ABD EFG*; ed è manifesto che in essa *DG* concorreranno ancora le superfizie *AOPE FBCQ*: domandasi pertanto il centro di gravità del cuneo *BP*.

Si dividano per mezzo le circonferenze *AB EF* ne' punti *K I*, e si uniscano le rette *KD IG*, nelle quali si prendano i Prop. 6 centri di gravità *M L* delle superficie *ABCO EFQP*, e unita la *ML* si divida per mezzo in *N*: dico che *N* è centro di gravità del cuneo *BP*.

Imperciocchè si divida per mezzo anche la *DG* in *H*, e si giunga *NH*.

E perchè l' angolo *BDM* è uguale all' angolo *FGL*, e la *BD* è parallela alla *FG*, siccome ancora il piano *ADB* è parallelo all' altro piano *EGF*, sarà la *DM* parallela alla *GL*; e sono uguali; laonde sarà pure la *ML* uguale e parallela alla *DG*: ma la *DG* è perpendicolare al piano delle superficie *ABCO EFQP*, dunque anche la *ML* sarà ad essi piani perpendicolare, di modo che *ML* sarà quella linea retta, che descrive il centro di gravità *M* della superficie *ABCO* nel suo movimento parallelo a se stessa e per la direzione *BF*: per conseguenza nella *ML* v' ha il centro di gravità sì delle superficie medesime *ABCO EFQP*, che di tutte l'altre, che nel solido *BP* sono ad esse superfizie parallele, e però nella *ML* vi dee essere il centro di gravità del solido *BP*. Di nuovo perchè il solido *BP* è figura analoga ad un rettangolo (prendendo il senso dell' analogia secondo la diffinizione de' Meccanici),

Meccanici), ed il centro di gravità di un rettangolo giace nel mezzo della libra, quindi anche il centro di gravità del cuneo *BP* farà nel mezzo della libra *ML*, o nel punto *N*; il che ecc.

Corollario I.

E poichè *LMDG* è parallelogrammo rettangolo, e il punto *N* è nel mezzo della *LM*, come il punto *H* è nel mezzo della *DG*, farà la *NH* uguale ad una delle *DM GL*, e perpendicolare alla *DG*; e però è tanto diftante il centro di gravità *N* del cuneo circolare dalla retta *DG*, quanto lo è il centro di gravità *M* della fuperficie *ABCO* dal punto *D*.

Corollario 2.

Per il che chiamato il raggio efteriore *DB* del cuneo $= c$; l' interiore $DC = b$, r il raggio delle Tavole, e l' angolo *ADB* al centro del cuneo $= 2\mu$, farà per le cofe dimoftrate $DM = \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c + b)} \cdot \frac{\text{sen.}\,\mu}{\mu}$; e però anche la diftanza *HN* del centro di gravità di un cuneo dalla retta *DG* farà uguale alla grandezza medefima $\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c + b)} \cdot \frac{\text{sen.}\,\mu}{\mu}$; e fe l'angolo al centro del cuneo fia infinitefimo, diverrà allora la $HN = \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c + b)}$, ovvero fatta la groffezza *CB* del cuneo $= g$, onde $c = b + g$, farà $HN = \frac{6b^2 + 6bg + 2g^2}{3(2b + g)}$. Prop. 6 Cor. 2 Prop. 6

Domanda V.

Per non confondere la mente con inviluppate Figure fia lecito d' indi in poi prefentare in piano gli Archi sì circolari, che di qualunque altra curvatura; e quefto piano s' intenda effere quello, che paffa per li centri di gravità di tutti i cunei e de' pilaftri: e fia

lecito ancora esprimere le gravità de' cunei colle rispettive superficie dedotte dal piano segante.

PROBLEMA 10. PROPOSIZIONE 10.

Trovare il centro di gravità de' cunei componenti un Arco piano.

Fig. XIV. Tav. I. Sia *CGAB* un Arco piano, *ILNM* il suo serraglio, e *ILKH* un altro cuneo qualunque.

Si dividano per mezzo le *HI IM* ne' punti *S F*, e si giungano le rette *SD FD*; poi si tolgano le *SR FO* uguali al terzo delle *SD FD*, e le *xQ EP* al terzo delle *xD ED*, cosicchè i punti *R O Q P* sieno centri di gravità de' triangoli *HID IMD KLD LND*: poi si faccia come il trapezio *HKLI* al triangolo *KLD* così la *QR* alla *RT*, e come il trapezio *ILNM* al triangolo *LND* così la *PO* alla *OV*; ed i punti *T V* saranno centri di gravità de' cunei *HKLI ILNM*; il che ecc.

COROLLARIO I.

Unite le *TV RO QP*, perchè la *SD* è tripla di *SR* come la *FD* di *FO*, sarà la *RO* parallela alla *CG* o alla *AB*; e per la stessa ragione la *QP* è parallela alla *AB*; laonde anche le *RO QP* sono fra di loro parallele. Di nuovo essendo come il trapezio *HKLI* al triangolo *KLD* così il trapezio *ILNM* al triangolo *LND*, sarà anche come *QR* a *RT* così *PO* a *OV*, dunque la *TV* è parallela alle *QP RO*, e perciò anche alla *AB*; per conseguenza i centri di gravità de' cunei sono nell' Arco piano collocati in una linea parallela alla corda.

COROLLARIO 2.

Si chiami ora la perpendicolare *ED* del triangolo isoscele *ADB* $= e$, e la grossezza *EF* dell' Arco piano $= g$, onde tutta la $DF = e + g$, e $FO = \frac{e+g}{3}$: ma la *EP* sarà $= \frac{e}{3}$, e $FP = FE + EP = g + \frac{e}{3} = \frac{e+3g}{3}$, dunque $PO = FP - FO$

$= \frac{e+3g}{3} - \frac{e+g}{3} = \frac{2g}{3}$. Perchè poi come il trapezio *ILNM* al triangolo *LND*, ovvero come la differenza de' quadrati delle *DF DE* al quadrato della *DE*, così la *PO* alla *OV*, farà sostituendo $(e+g)^2 - e^2 : e^2 :: \frac{2g}{3} : OV$, o riducendo $2eg + g^2 : e^2 :: \frac{2g}{3} : OV$, e però $OV = \frac{2e^2g}{3(2eg+g^2)} = \frac{2e^2}{3(2e+g)}$. In oltre essendo $EO = FO - FE = \frac{e+g}{3} - g = \frac{e-2g}{3}$, se si sottragga *EO* da *OV* si conseguirà la rimanente $EV = OV - EO = \frac{2e^2}{3(2e+g)} - \frac{e-2g}{3} = \frac{3eg+2g^2}{3(2e+g)}$: quindi i centri di gravità de' cunei nell' Arco piano sono in una linea retta parallela alla corda alla distanza di $\frac{3eg+2g^2}{3(2e+g)}$ $-\beta-$

S C O L I O.

Dopo aver trovato prima i centri di gravità de' cunei degli Archi circolari, poi quelli degli Archi piani, resterebbe ora a cercare il centro di gravità del serraglio di un Arco composto; ciò nulla ostante s' è pensato di ommetterne l' indagine, prima perchè non se ne fa alcun uso nel corso dell' Opera, e poi perchè essa riesce tanto per sè evidente quanto lunghi e nojosi i calcoli.

TEOREMA I. PROPOSIZIONE II.

Se fra due pilastri sia collocata la centina di un Arco intero, poi vi si ponga da una parte la sola mossa; questa non premerà la centina quando la verticale condotta dal suo centro di gravità cada nell' impostatura.

Sia la centina *ADC* collocata fra i pilastri *AN CR* per potere col di lei mezzo gittar l' Arco intero *ALC*; poi si pon- Fig. VI. Tav. I.

ga ſul pilaſtro *AN* la moſſa *EKAF*, della quale ſia *I* il centro di gravità, e ſi tiri la verticale *IA*, che cada nell' impoſtatura *AK*; dico che la moſſa *EKAF* non preme la centina.

Poichè ſopra la ſuperficie orizzontale *AK* s' appoggia la moſſa *EKAF*, e dal ſuo centro di gravità *I* condotta la verticale *IA* cade eſſa in un punto della baſe, per le coſe dimoſtrate nella Statica, la moſſa ſtarà ferma, nè potrebbe cadere anche rimoſſa la centinatura; e però neſſuna preſſione ſoſtiene la centina per conto della ſola moſſa; il che ecc.

COROLLARIO.

Quindi ſe le moſſe dell' Arco intero non ſieno maggiori del conio *EKAF*, il di cui centro di gravità *I* è in una direzione verticale col punto *A*, le moſſe non comprimeranno la centina.

PROBLEMA II. PROPOSIZIONE 12.

Dati i raggi eſteriore ed interiore di un Arco intero, ritrovare la maſſima grandezza, che può aſſegnarſi alla moſſa, perchè collocata ſul pilaſtro non comprima la centina.

Fig. VI. Tav. I. Sia il raggio eſteriore $BK = c$, l' interiore $BA = b$, r il raggio delle Tavole, e l' angolo $KBE = 2\mu$. Sia poi *EKAF* una moſſa avente il ſuo centro di gravità *I* in direzione verticale col punto *A*, coſicchè *EKAF* ſia la maſſima grandezza che le ſi può aſſegnare onde non prema la centina *ADC*. (Cor. dell' ant.)

Sarà pertanto la *BI* o ſia la diſtanza del centro di gravità della moſſa dal centro dell' Arco $= \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c+b)} \cdot \frac{\text{sen.}\,\mu}{\mu}$, (Cor. 2 Prop. 9)

cioè $\left(\text{fatta } m = \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c+b)}\right)$ ſarà $BI = \frac{m\,.\,\text{sen.}\,\mu}{\mu}$. E perchè nel triangolo rettangolo *IAB* ſta come la *BI* alla *BA*, così il ſeno tutto al coſeno dell' angolo *IBA*, ſarà ſoſtituendo,

$\frac{m \,.\, \text{sen.}\, \mu}{\mu} : BA :: r : \cos.\, \mu$, laonde $BA = \frac{m \,.\, \text{sen.}\, \mu \,.\, \cos.\, \mu}{r\mu}$: ma BA è anche $= b$, dunque $\frac{m \,.\, \text{sen.}\, \mu \,.\, \cos.\, \mu}{r\mu} = b$. Di nuovo (fatto $\pi = \varphi = \mu$ nell' equazione I.) essendo $r \,.\, \text{sen.}\, 2\mu =$ Prop. 7
$2 \,.\, \text{sen.}\, \mu \,.\, \cos.\, \mu$, e $\text{sen.}\, \mu \,.\, \cos.\, \mu = \frac{r \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}{2}$, sarà sostituendo $\frac{m \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}{2\mu} = b$; e però $2\mu : \text{sen.}\, 2\mu :: m : b$. Per il che se si prenda nel semicerchio ADC un arco AF tale ch' ei abbia al suo seno FO quella stessa proporzione, che ha $m:b$, ovvero $\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c+b)} : b$, unita la BFE, sarà $EKAF$ la massima grandezza che puossi assegnare alla mossa affinchè non prema la centina; e così si è ridotto il Problema ad altro già noto, e che al primo aspetto si manifesta di natura trascendente da risolversi con qualcuno de' soliti metodi di approssimazione; il che ecc.

S c o l i o I.

Potrebbe cader sospetto non esser in ogni caso risolubile il Problema; imperciocchè siccome debbe stare l' arco AF *al suo seno* FO *in ragione di* m *a* b, *e l' arco è sempre maggiore del suo seno, così, per poter sempre risolvere il Problema, bisognerebbe provare che* m *è maggiore di* b. *Ma per togliere ogni obbiezione lo faremo nel seguente modo. Essendo il raggio esteriore* c *maggiore di* b, *cioè* $c > b$, *sarà pure* $2c > c + b$, *e* $2c \,.\, c > b(c + b)$, *ovvero* $2c^2 > bc + b^2$, *e aggiugnendo da ambe le parti* $2bc + 2b^2$, *sarà* $2c^2 + 2bc + 2b^2 > 3bc + 3b^2$, *e però* $\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c + b)} > b$, *ossia* $m > b$.

C o r o l l a r i o I.

Quindi se fosse la grossezza dell' Arco intero uguale al raggio interiore, o $c = 2b$, sarà $m : b :: \frac{14b^2}{9b} : b :: 14 : 9$; dunque

anche l'arco AF al suo seno FO debbe avere la proporzione di 14:9. Ma secondo le cose dimostrate da *Archimede* il quadrante AD al raggio DB ha prossimamente la ragione di 11:7, e la ragione di 11:7 è bensì maggiore della ragione di 14:9, ma però sono vicinissime fra di loro; laonde anche la ragione del quadrante AD al raggio DB è bensì maggiore della ragione di AF a FO, ma però prossimamente uguale, e il punto F cadrà quasi sul punto D. Per conseguenza in un Arco intero, che avesse la sua grossezza uguale al raggio interiore, si potrebbe fare la mossa quasi uguale alla metà dell' Arco senza ch' essa premesse la centina. Ed accrescendo la grossezza dell' Arco oltre il raggio sopraddetto, è chiaro che si farebbe maggiore la proporzione di $m:b$, e però si potrebbe costruire la mossa maggiore del mezzo Arco senza aggravarne la centina, proposizione che parrà paradossa a chi non abbia ben colto il principio, sul quale si fonda.

Scolio 2.

Non si assegna per altro in Architettura agli Archi una grossezza uguale al raggio interiore, ma ne hanno ordinariamente una di gran lunga minore; ed inoltre la divisione dell' Arco si fa a bella posta in un numero sì grande di cunei, che puossi fondatamente assumere in avvenire, che negli Archi interi soliti farsi dagli Architetti le mosse CW *non aggravano mai la centina, ma tutto il loro peso è impiegato a premere l' impostature de' pilastri; vale a dire che la perpendicolare* PQ *condotta dal centro di gravità* P *della mossa all' impostatura* CM *cade sulla* CS.

Corollario 2.

Doman. 2 Ed essendo tutti i cunei componenti un Arco circolare uguali fra loro, così sarà vero che ne' cunei degli Archi circolari, per esempio nel cuneo WT, la linea XV condotta dal centro di gravità X perpendicolare ad uno de' suoi lati ZW, cadrà in un punto del lato medesimo, non mai di fuori.

TEOREMA 2. PROPOSIZIONE 13.

Se due forze, impiegate a muovere o a resistere al moto di qualche corpo, si compongano insieme, e si prenda un punto qualsivoglia fuori dell' angolo dalle loro direzioni compreso; i momenti delle due forze rispetto al punto preso sono uguali al momento della forza composta.

Due forze proporzionali alle linee *AB BD* sieno impiegate a muovere o a resistere al moto di qualche corpo per le direzioni *BA BD*, che s' incontrino insieme nel punto *B*, e compiuto il parallelogrammo *BAED* si tiri la diagonale *BE*, ch' esprima la forza composta di esse due: si prenda poi fuori dell' angolo *ABD* un punto *C*: dico che i momenti delle forze *BA BD* rispetto al punto *C* sono uguali al momento della forza composta *BE*. Fig. VII. Tav. I.

Dal punto *C* alle direzioni *BA BD BE* si conducano le perpendicolari *CI CH CG*; si prolunghino poscia le *IC ED*, quando occorra, sino al loro comune concorso in *F*, e si unïscano le *CB CA CE CD*: sarà il momento della forza *AB* uguale al prodotto di *AB* in *CI*, il momento della forza *BD* uguale al prodotto di *BD* in *CH*, e il prodotto di *BE* in *CG* esprimerà il momento della forza composta *BE*.

E poichè il triangolo *EDC* è uguale alla metà del rettangolo di *ED* in *CF*, e il triangolo *ABC* è uguale alla metà del rettangolo di *AB* o di *ED* in *CI*, saranno i due triangoli *EDC ABC* uguali alla metà dei rettangoli di *ED* in *CF* e di *ED* in *CI*, e però saranno uguali alla metà del rettangolo di *ED* in *IF*: ma anche il triangolo *EBD* è uguale alla metà del rettangolo di *ED* in *IF*; dunque il triangolo *EBD* è uguale ai triangoli *EDC ABC*. Pongasi comune il triangolo *BDC*, sarà il quadrilatero *EBCD* uguale ai triangoli *EDC ABC BDC*: il quadrilatero poi *EBCD* è uguale ai triangoli *EDC EBC*, laonde i triangoli *EDC EBC* sono uguali ai triangoli *EDC ABC BDC*; e tolto il triangolo comune *EDC*, resterà il triangolo *EBC* uguale ai triangoli *ABC BDC*: e però anche i

prodotti di *AB* in *CI* e di *BD* in *CH* ſono uguali al prodotto di *BE* in *CG*; e per conſeguenza i momenti delle forze *AB BD* ſono uguali al momento della forza compoſta *BE*; il che ecc.

TEOREMA 3. PROPOSIZIONE 14.

Se due forze, impiegate a muovere o a reſiſtere al moto di qualche corpo, ſi compongano inſieme, e ſi prenda un punto qualſivoglia collocato dentro le loro direzioni, ma non nella direzione della forza compoſta; ſarà la differenza de' momenti delle due forze riſpetto al punto preſo uguale al momento della forza compoſta.

Fig. VIII. Tav. I. Due forze proporzionali alle linee rette *BA BD* ſieno impiegate a muovere o a reſiſtere al moto di qualche corpo per le direzioni *BA BD*, le quali ſi compongano inſieme, e ſia *BE* la forza compoſta: ſi prenda poi un punto *C* fra le direzioni *BA BD*, ma non nella direzione *BE* della forza compoſta: dico che la differenza de' momenti delle forze *BA BD* riſpetto al punto *C* è uguale al momento della forza *BE*.

Imperciocchè dal punto *C* alle direzioni *BA BD BE* ſi conducano le perpendicolari *CI CH CG*, e ſi prolunghino le *IC ED*, quand' occorra, ſino al loro concorſo in *F*; ſi tirino poi le *CB CA CE CD*: ſarà il prodotto di *BA* in *CI* uguale al momento della forza *BA*, il prodotto di *BD* in *CH* uguale al momento della forza *BD*, e al momento della forza compoſta *BE* ſarà uguale il prodotto di *BE* in *CG*.

Si dimoſtrerà pertanto, come nell' antecedente, che i triangoli *ABC EDC* ſono uguali al triangolo *EBD*; e tolto da una parte e dall' altra il triangolo *EDC*, reſterà il triangolo *ABC* uguale al quadrilatero *BECD*, o ſia ai triangoli *ECB ECD*; laonde il triangolo *ECB* ſarà uguale alla differenza de' triangoli *ABC BCD*; e quindi anche la differenza de' prodot-

ti

ti di *BA* in *CI* e di *BD* in *CH* è uguale al prodotto di *BE* in *CG*; e per conſeguenza la differenza de' momenti delle forze *BA BD* è uguale al momento della forza compoſta *BE*; il che ecc.

Corollario 1.

Se il punto *C* foſſe nella direzione *BE* della forza compoſta, dico che il momento della forza *BA* è uguale al momento della forza *BD*. Perchè eſſendo i due triangoli *ACB ECD* uguali al triangolo *EBD*, tolto da ambe le parti il triangolo *ECD*, reſterà il triangolo *ACB* uguale al triangolo *BCD*; e però anche il prodotto di *BA* in *CI*, cioè il momento della forza *BA*, ſarà uguale al prodotto di *BD* in *CH*, ovvero al momento della forza *BD*. Fig. IX. Tav. I.

Corollario 2.

E perchè s' è dimoſtrato, che il triangolo *ABC* è uguale ai triangoli *ECB BCD*, ſarà il triangolo *BCD* minore del triangolo *ABC*, e però il momento della forza *BD* minore del momento della forza *BA*, e ciò perchè nella Figura s' è preſo il punto *C* da quella parte della *BE*, ov' è collocata la forza *BD*: viceverſa prendendo il punto *C* dalla parte della *BA*, ſi dimoſtrerà il momento della forza *BA* minore del momento della forza *BD*; dunque da quella parte della direzione *BE* ſta il momento minore, dalla quale vien preſo il punto *C*. Fig. VIII. Tav. I.

TEOREMA 4. PROPOSIZIONE 15.

Se quante forze ſi vogliano ſituate nel medeſimo piano ſi compongano inſieme, e ſieno eſſe forze impiegate a muovere, o a reſiſtere al moto di qualche corpo; preſo un punto fuori dello ſpazio fra tutte le loro direzioni compreſo, ſaranno i momenti delle forze riſpetto al punto preſo uguali al momento della forza compoſta.

Fig. X. Tav. I. Siano tre forze *AB BD FG* situate nello stesso piano, impiegate per le direzioni *BA BD FG* a muovere o a resistere al moto di qualche corpo, e fuori di esse direzioni si prenda il punto *C*: si compongano poi le forze *BA BD*, le cui direzioni si uniscano insieme nel punto *B*, e la loro forza composta sia *BE*; e di nuovo la direzione *FG* della terza forza *FG* concorra colla *BE* in *I*, e fatte le *IK IL* uguali alle *BE FG* si compia il parallelogrammo *IKHL* per avere nella sua diagonale *IH* la forza composta delle tre *BA BD FG*: dico pertanto che i momenti delle tre forze suddette rispetto al punto *C* sono uguali al momento della forza composta *IH*.

Imperciocchè essendo *BA BD* due forze qualunque, e *BE* la loro forza composta, fuori poi delle direzioni *BA BD* giace
Prop. 13 il punto *C*, saranno i momenti delle forze *BA BD* rispetto a *C* uguali al momento della forza composta *BE*, ossia della *IK*. Per la stessa ragione i momenti delle forze *IK IL* ovvero delle *IK FG* sono uguali al momento della forza composta *IH*: ma si è dimostrato il momento della *IK* uguale a' momenti delle *BA BD*; laonde i momenti delle tre forze *BA BD FG* sono uguali al momento della forza composta *IH*. E nella stessa maniera si proverà l' assunto se il numero delle forze componenti sia più di tre.

TEOREMA 5. PROPOSIZIONE 16.

Se quante forze si vogliano situate nel medesimo piano si compongano insieme, e sieno esse forze impiegate a muovere o a resistere al moto di qualche corpo; preso un punto fra esse direzioni, il quale però non cada nè sopra le direzioni delle forze semplici, nè sopra la direzione della forza composta, sarà la differenza de' momenti di quelle, che sono da una parte del punto preso, da' momenti di quelle che sono dall' altra, uguale al momento della forza composta.

Sieno le tre forze *BA BD FG* situate nel medesimo piano, ed impiegate per le direzioni *BA BD FG* a muovere o a resistere al moto di qualche corpo; e si trovi, come nell' antecedente, la forza composta *BE* delle due *BA BD*, indi la forza composta *IH* delle tre *BA BD FG*. Si prenda poi un punto *C* tra le direzioni *BA BD FG*, ma che non cada nè su di esse, nè sulla direzione della forza composta di tutte; e resti il punto *C* fuori dell' angolo dalle direzioni *BA BD* compreso, ma fra le direzioni *IK FG* e da quella parte della direzione *IH* della comune forza composta, dalla quale si trova la direzione *FG*: dico che l' eccesso de' momenti delle forze *BA BD* sul momento della forza *FG*, tutti rispetto al punto *C*, sarà uguale al momento della forza composta *IH*. Fig. XI. Tav. I.

Imperciocchè il momento di *BA* insieme col momento di *BD* è uguale al momento della loro rispettiva forza composta *BE* ovvero *IK*, conciossiachè il punto *C* sia fuori delle direzioni *BA BD*: ma essendo esso punto *C* fra le direzioni *IK FG* e dalla stessa parte della *IH* in cui è la *FG*, avviene che l' eccesso del momento della *IK* sul momento della *FG* è uguale al momento della forza composta *IH*; dunque anche l' eccesso de' momenti delle forze *BA BD* sul momento della forza *FG* è uguale al momento della loro comune forza composta *IH*. Lo stesso si dimostrerà di qualunque altro numero di forze. Prop. 13 Prop. 14 Corol. 2

Corollario I.

Se il punto *C* sia nella direzione *IH* della forza composta di tutte, sarà la somma de' momenti delle forze, che sono da una parte della *IH*, uguale alla somma de' momenti di quelle che sono dall' altra.

Corollario 2.

E se il punto *C* cadesse sopra una delle direzioni delle forze semplici, allora il momento di questa forza riuscirebbe uguale a zero; ma sarebbe però sempre vero (per le cose dette in questa e nell' antecedente proposizione) che la somma de' momenti delle forze componenti, ovvero la differenza de' momenti di quelle che sono da una parte del punto *C* da' Fig. X. e XI. Tav. I.

momenti dell' altre collocate dalla parte contraria, uguaglierebbe il momento della loro comune forza composta.

COROLLARIO 3.

Fig. XI. Tav. I. E' pure evidente, che se, date quante forze si vogliano *BA BD FG*, si prenda la loro comune forza composta *IH*, da quella parte della *IH* in cui sarà collocato il punto *C*, dalla medesima riuscirà la somma de' momenti minore: come nella Figura, in cui s'è provato che il momento della *FG* è minore della somma de' momenti delle forze *BA BD*.

SCOLIO.

Forse non disdirebbe inserire in un corso di elementi di Statica questi ultimi Teoremi sì per la loro importanza, come per la facile loro dimostrazione.

TEOREMA 6. PROPOSIZIONE 17.

Se un corpo collocato sopra di un piano immobile orizzontale o inclinato all' orizzonte sia tirato da una forza semplice o composta, la di cui direzione sia perpendicolare al piano, e incontri in un punto la base sulla quale s' appoggia il corpo, starà esso fermo, e tutta la pressione della forza sarà sostenuta dalla reazione del piano immobile.

Veggasi la dimostrazione di questo Teorema nella *Nouvelle Mécanique de Varignon Tom. I. pag.* 34 *e* 35, il quale più alla distesa e più chiaramente d' ogni altro ha trattata la dottrina delle pressioni de' corpi sulle superficie immobili.

COROLLARIO 1.

Fig. XII. Tav. I. Se dal centro di gravità *C* del grave *MB* collocato sul piano orizzontale *EF*, non più immobile, ma mobile d' intorno

al sostegno *A*, si conduca la verticale *CD*, la quale incontri la base *EB*, si potrà con una forza *G* applicata dall' altra parte del sostegno contrappesare la pressione del grave *MB*, purchè stia come il suo peso alla forza *G*, così reciprocamente la distanza *AH* alla distanza *AD*.

COROLLARIO 2.

Ma il piano mobile *EF* sia inclinato all' orizzonte, e oltre la forza *CD* della gravità siavi altra forza *PQ*, che tiri il grave *MB* per la direzione *PQ*; dal concorso poi *L* di esse direzioni *CD PQ* prese le rette *LI LO* proporzionali alle forze, si compia il parallelogrammo *LIKO*. Pertanto se la diagonale *LK* sia perpendicolare al piano *EF* e incontri la base *EB* in qualche punto *N*, sarà vero che con una forza *G* applicata dall' altra parte del sostegno *A* si potrà equilibrare la pressione della forza composta, purchè qual ragione ha la forza *LK* alla forza *G*, la medesima reciprocamente abbia la *AH* alla *AN*. Fig. XIII. Tav. I.

TEOREMA 7. PROPOSIZIONE 18.

Se un corpo collocato sopra di un piano immobile orizzontale o inclinato sia tirato da una forza qualunque, semplice o composta, per una direzione inclinata ad esso piano, non potrà il corpo star fermo, ma si muoverà strisciando o rotolando lungo al piano.

Veggasi similmente la dimostrazione di questo Teorema negli Autori di *Meccanica*, e particolarmente in *Varignon* al luogo citato.

COROLLARIO.

Per la qual cosa se il piano, per esempio *EF*, non sia immobile, ma mobile d' intorno al sostegno *A*, non si po- Fig. I. Tav. II.

trà mai con una forza *G* applicata dall' altra parte bilanciare la forza semplice o composta *CD*, ed impedire il movimento del corpo *MB*, quando la direzione *CD* di essa forza sia inclinata al piano sopraddetto *EF*, anche se incontri la base *EB*.

TEOREMA 8. PROPOSIZIONE 19.

Fig. II. Tav. II. Siano due superficie immobili qualunque *SV* *XY* piane o curve, fra le quali giaccia il grave *EOQF*, dico

I. Che il grave *EOQF* non può restar fermo fra le superficie *SV XY*, quando ei sia di tal figura e collocato in tal posizione, che nella direzione *LC* del suo peso non abbiavi qualche punto *A* dentro o fuori della sua massa, da cui possansi condurre alle superficie medesime *SV* *XY* due perpendicolari *AO AQ*, le quali incontrino in qualche punto le basi per mezzo delle quali ei s' appoggia alle superficie.

II. Ma quando da qualche punto *A* della direzione *LC* si possano condurre le due perpendicolari *AO AQ* alle superficie *SV XY*, che incontrino le basi, starà allora fermo il grave *EOQF* da esse sole superficie sostenuto.

III. Finalmente che se in questo stato di quiete del grave *EOQF*, presa nella direzione *LC* del suo peso una retta qualunque *AC* come diagonale, si compia il parallelogrammo *ABCD*, che abbia i lati *AB AD* perpendicolari alle superficie *SV XY*, sarà il peso di esso grave *EOQF* alla sua pressione da ambe le parti, come la diagonale *AC* ai lati *AB AD*.

La dimostrazione del Teorema trovasi per esteso dichiarata nel *Tom. II. pag.* 94 del citato corso di *Meccanica* del *Varignon*.

COROLLARIO.

Quello che si è detto del corpo *EOQF* tirato al centro della terra dalla sua gravità, vale ancora se fosse tirato da altre quante si vogliano forze per altrettante direzioni, cosicchè *LC* non più la direzione della sola forza della gravità, ma la direzione della forza composta di tutte esprimesse.

SCOLIO.

Non è inutile l'avvertire, che la direzione LC *della forza semplice o composta debbe necessariamente essere di mezzo alle perpendicolari* AQ AO, *altrimenti non potrebbe essere il corpo* EOQF *dalle due superficie insieme* SV XY *sostenuto; per la stessa ragione bisogna che le direzioni* AQ AO *non sieno per diritto fra loro; le quali cose sono dal citato Autore bensì tacitamente supposte, ma non espresse nell' enunciazione.*

PROBLEMA 12. PROPOSIZIONE 20.

Dato un cuneo sostenuto da due piani immobili e inclinati all' orizzonte, o da un piano inclinato e dalla centina pure immobili, ritrovare la pressione ch' esercita il cuneo contro ciascuno de' piani, o contro il piano e la centina.

Sia il cuneo *FP* sostenuto primieramente da' due piani immobili *EL GH* inclinati all' orizzonte, i quali si combacino co' lati del cuneo: si domanda la pressione contro l' uno e l' altro de' piani *EL GH*. Fig. III. Tav. II.

Prendasi il centro di gravità *A* del cuneo, da cui si conducano le linee *AB AC* perpendicolari ai piani *EL GH*, le quali cadranno in un punto de' lati del cuneo: poi dallo stesso Cor. 2. Prop. 12

punto *A* si tiri la verticale *AD*, ch' esprima la gravità del cuneo, e si compia il parallelogrammo *ABDC*. Essendo pertanto espressa la gravità del cuneo per la retta *AD*, le *AB AC* esprimeranno le pressioni dallo stesso esercitate su' piani *EL GH*.

Prop. antec.

Fig. IV. Tav. II. Ma sia in secondo luogo sostenuto il cuneo *FP* dal piano inclinato *EL* e dalla centina *PH* amendue immobili; e condotta dal centro di gravità *A* la verticale *AD* e le *AB AC* perpendicolari al piano inclinato *EL* ed alla centina *PH*, si compia il parallelogrammo *ABDC*. Sarà vero, come prima, che se *AD* esprima la gravità del cuneo, *AB* dinoterà la pressione sul piano *EL*, ed *AC* quella sulla centina *PH*; il che ecc.

Luog. cit.

Corollario 1.

Se oltre la forza *AD* della gravità vi fosse altra forza, come *AR*, la quale tirasse il cuneo per la direzione *AR* che incontri la *AD* in un punto *A*, si compia prima il parallelogrammo *ARVD* per avere la forza composta *AV* equivalente alle due *AD AR*, e indi l' altro parallelogrammo *ABVC* sulle linee *AB AC* perpendicolari ai piani, e allora le *AB AC* esprimeranno le pressioni su due piani immobili, o sopra il piano immobile e la centina.

Fig. V. e VI. Tav. II.

Corollario 2.

Quanto s' è detto intorno ad un cuneo collocato fra due piani inclinati immobili vale anche quando uno di essi sia piano verticale immobile; cioè a dire si troveranno nello stesso modo le pressioni sul piano inclinato e sul verticale fra' quali giace il cuneo.

Corollario 3.

E se il piano *EL* della *Fig. III.* fosse piano mobile d' intorno al punto *L*, per contrappesare la pressione del cuneo sul piano medesimo converrebbe mettere dall' altra parte del sostegno la forza *T*, il cui momento uguagliasse il momento della

della forza *AB*, com' è manifesto. Lo stesso vale per la *Fig. V.*, e varrebbe anche per le *Fig. IV.* e *VI.* se la centina non fosse al piano mobile attaccata.

TEOREMA 9. PROPOSIZIONE 21.

Se sopra il pilastro di un Arco intero sia collocata la mossa, la quale prema verticalmente il pilastro, e sia tirata da altra forza inclinata esternamente all' orizzonte, non istarà ferma la mossa sul pilastro senza un qualche rattenimento; e questo apposto, si potranno contrabbilanciare le forze sopraddette e la gravità del pilastro con certa forza messa dalla parte opposta del punto d' appoggio del pilastro medesimo.

Sia collocata la mossa *GF* sopra il pilastro *FI* di un Arco intero, e sia il pilastro mobile d' intorno al punto estremo *I* della sua base, e premuto da tutto il peso della mossa: siavi poi la forza *BD* che per la direzione *BD* inclinata all' orizzonte tiri dalla parte esteriore la mossa medesima, e passi la *BD* o no pel centro di gravità *B*: dico primieramente che la mossa *GF* non potrà star ferma sul pilastro senza esser in qualche modo rattenuta. Fig. VII. Tav. II. Dom. 3

Imperciocchè dal centro di gravità *B* della mossa si conduca la verticale *BC*, e nelle direzioni *BC BD* prese dal punto del loro concorso le linee *BC BD* proporzionali alle forze si costruisca il parallelogrammo *BDEC*: la diagonale *BE* esprimerà dunque una forza equivalente all' altre due, e la sua direzione *BE* diverrà inclinata al piano orizzontale *QF*. Pertanto essendo il piano *QF* mobile d' intorno al punto *I* premuto dalla forza *BE* per una direzione inclinata ad esso piano, non si potrà mai con altra forza applicata dall' altra parte del sostegno *I* contenere la mossa *GF* e impedire il suo movimento lungo al piano *FQ*. Havvi dunque necessità di apporvi un qualche rattenimento; e siccome questo può farsi in varie Corol. Prop. 18

forme e maniere, così, per preparare la mente a quanto si vuol esporre ne' Libri susseguenti, supporremo che il rattenimento sia la centina esteriore *QG* attaccata fermamente al pilastro *FI* e con esso formante una cosa sola.

Dom. IV.

Dico dunque di nuovo, che ciò supposto si potranno contrabbilanciare la gravità della mossa, la forza *BD*, e la gravità del pilastro con altra forza collocata dalla parte opposta del sostegno *I*.

Imperciocchè dal centro di gravità *M* del pilastro si conduca la verticale *MO*, che concorra in *O* colla *BE*; indi fatta la *OP* uguale alla *BE* e la *ON* proporzionale alla gravità del pilastro, si compia il parallelogrammo *OPRN* e si tiri la diagonale *OR*. Sarà il momento della forza composta *OR* rispetto al punto *I* uguale alla differenza de' momenti delle forze *OP ON*, ovvero *BE ON*, la prima delle quali cerca rovesciare il pilastro mentre l' altra lo sostiene; e però colla forza *S* collocata dall'altra parte del sostegno *I* si potranno contenere esse forze *BE ON* in equilibrio, purchè il momento della forza *S* sia uguale al momento della forza composta *OR*; il che ecc.

Prop. 14

Corollario.

Se la *BE* seghi la base inferiore *QF* della mossa, come nella Figura, per poco che sia grande la sopraccentina *QG* sarà atta a sostenere la mossa, poichè nella *BE* vi sarà sempre un punto da cui si possano condurre due perpendicolari al piano *QF* del pilastro e alla sopraccentina; ma se la *BE* non segasse la base, e tagliasse la sopraccentina, per la stessa ragione è manifesto, bastare che resti la sopraccentina più alta del punto d' intersecazione, perchè la mossa sia rattenuta e obbligata a star ferma sul pilastro *FI*.

Prop. 19

Scolio.

Veramente tirata la linea BH *perpendicolare alla centina esteriore* QG, *che serve di rattenimento*, *e compiuto il parallelogrammo* BHEL, *la forza* BE *dividesi nelle due* BH BL, *una diretta a premere la centina e a girare il pilastro*, *l' altra all' incontro che*

Prop. cit.

preme il pilastro, e cerca di sostenerlo insieme colla terza forza ON: *ma torna lo stesso o si consideri la sola forza* BE, *o si considerino le due* BH BL. *Di fatto essendo il momento di* OR *d' intorno al punto* I *uguale alla differenza de' momenti delle* BE ON, *e il momento di* BE *uguale alla differenza de' momenti* BH BL, *sarà il momento della forza* OR *uguale altresì alla differenza del momento della forza* BH *da' momenti delle forze* BL ON; *quindi se la forza* S *collocata dall' altra parte del sostegno* I *sarà atta ad equilibrarsi con* OR, *si equilibrerà ancora colle tre* BH BL ON. Prop. 14

Fine del Libro Primo.



LIBRO SECONDO

DELLA PRESSIONE DE' CUNEI SULLE CENTINE DEGLI ARCHI CIRCOLARI COMPOSTI DI UN NUMERO QUALSIVOGLIA DI CUNEI.

PROBLEMA I. PROPOSIZIONE I.

SE fra i pilaſtri di un Arco intero ſia meſſa la centina, poi da una parte la moſſa e un cuneo; ſi domanda la preſſione del cuneo ſulla centina, e la forza e direzione colla quale ei preme la moſſa.

Fig. VIII. Tav. II. Fra i pilaſtri di un Arco intero ſia poſta la centina *AD*, poi da una parte ſopra il pilaſtro *AR* la moſſa *AF*, e il cuneo *FD*; ſi ricerca la preſſione del cuneo *FD* ſulla centina *AD*, e la forza e direzione con cui egli preme la moſſa *AF*.

Si prendano i centri di gravità *G L* del conio *FD* e della moſſa *AF*, e ſi conducano le verticali *GI LN* uguali fra loro, le quali eſprimano le loro riſpettive gravità, poi ſi uniſca *GL* che ſarà perpendicolare a *FZ*. Si giungano poi i raggi della Figura, e ſi compia il parallelogrammo *GKIH*.

Prop. 20 Lib. I. E' manifeſto pertanto, ch'eſprimendo *GI* la gravità aſſoluta del cuneo *FD*, *GH* eſprimerà la ſua preſſione ſulla centina *AD*, e *GK* ſarà la forza e direzione colla quale ei opera contro il piano ſuperiore della moſſa; il che ecc.

COROLLARIO I.

Prop. 21 Lib. I. Si prolunghi *GL* in *M* finchè *LM* ſia uguale a *GK*. E perchè oltre la forza *LN* della ſua gravità la moſſa ſoffre ancora la preſſione *LM*, la cui direzione paſſa pel centro di gravità *L*, ed è inclinata all' orizzonte, non iſtarebbe ferma la

moſſa ſenza un qualche rattenimento: ed ecco che ſi principia a paleſar la ragione della Domanda IV, ed in progreſſo ſempre più. Lib. I.

C O R O L L A R I O 2.

Per conſeguenza fatto prima il parallelogrammo *LMQN*, poi l' altro *LPQO*, dinoterà *LP* la preſſione della moſſa ſulla ſopraccentina, o quella forza con cui la moſſa è ſpinta dalla parte eſteriore dell' Arco, che in altro luogo abbiamo chiamata sfiancamento. Ed è manifeſto ancora che la ſopraccentina dee arrivare ad un punto per poco ſuperiore a *C*, ſe la linea *LQ* ſeghi la baſe *AC* della moſſa; ma quando ſeghi la ſopraccentina, dovrà queſta eſſere un poco più alta del punto d' interſecazione. Dif. 15 Corol. Prop. 21

PROBLEMA 2. PROPOSIZIONE 2.

Date le ſteſſe coſe come nell' antecedente; ritrovare il valore analitico della preſſione del cuneo ſulla centina, e dello sfiancamento della moſſa.

Sieno le gravità *GI* *LN* del cuneo *FD* e della moſſa *AF* uguali ad a, il raggio delle Tavole $= r$; e l' angolo $ABZ = ZBD$ ſi chiami 2μ. Fig. VIII. Tav. II.

E poichè gli angoli *GVB* *GXB* ſono retti, il ſemicerchio deſcritto ſul diametro *GB* paſſerebbe per amendue i punti *V* *X*, dunque gli angoli *VGX* *VBX* ſono uguali; ma l' angolo $VBX = 2\mu$, laonde anche l' angolo *VGX*, o vogliaſi dirlo $KGI = 2\mu$. Di nuovo eſſendo come il ſeno dell' angolo *IKG*, ovvero dell' angolo *KGH*, al ſeno dell' angolo *KGI*, così la *GI* alla *IK* o alla *GH*; il ſeno poi dell' angolo *KGH* è uguale al coſeno dell' angolo *GBF*, ch' è la metà di *DBZ*; e però ſoſtituendo i valori analitici ſarà $\cos.\mu : \text{sen.}\, 2\mu :: a : GH$, quindi *GH* o la preſſione del cuneo *FD* ſulla centina è $= \frac{a\,.\,\text{sen.}\, 2\mu}{\cos.\, \mu}$. Prop. ant.

In oltre perchè come il ſeno dell'angolo *IKG* al ſeno dell' angolo *KIG* o dell' alterno *IGH*, così è la *GI* alla *GK*; ed è il ſeno dell'angolo *IGH* uguale al coſeno del ſuo complemento *GBX*, cioè $a \cos. 3\mu$; dunque ſarà $\cos. \mu : \cos. 3\mu :: a : GK$, e per conſeguenza la preſſione *GK* del cuneo ſulla moſſa, o *LM*, o ancora *NQ* ſarà $= \frac{a . \cos. 3\mu}{\cos. \mu}$. Si conduca pertanto dal punto *Q* la *QW* perpendicolare alla *LO*: e perchè l' angolo *QNW* è uguale all' angolo *MLN*, ovvero a *KGI* cioè a *VBX*, l' angolo poi *VBX* è $= 2\mu$; dunque anche l' angolo *QNW* $= 2\mu$; laonde eſſendo nel triangolo rettangolo *QNW* come il raggio al ſeno dell'angolo *QNW*, così la *QN* alla *QW*, ſarà ſoſtituendo $r : \text{sen.} 2\mu :: \frac{a . \cos. 3\mu}{\cos. \mu} : QW = \frac{a . \text{sen.} 2\mu . \cos. 3\mu}{r . \cos. \mu}$: e ſimilmente eſſendo $QN : NW :: r : \cos. QNW$, o ſoſtituendo $\frac{a . \cos. 3\mu}{\cos. \mu} : NW :: r : \cos. 2\mu$, ſarà $NW = \frac{a . \cos. 2\mu . \cos. 3\mu}{r . \cos. \mu}$; la *LN* poi è $= a$, dunque tutta la $LW = a + \frac{a . \cos. 2\mu . \cos. 3\mu}{r . \cos. \mu}$. Per la qual coſa ſarà l' ipotenuſa $LQ = \sqrt{\left((QW)^2 + (LW)^2\right)}$ $= \sqrt{\left(\left(\frac{a . \text{sen.} 2\mu . \cos. 3\mu}{r . \cos. \mu}\right)^2 + \left(a + \frac{a . \cos. 2\mu . \cos. 3\mu}{r . \cos. \mu}\right)^2\right)}$, e queſta quantità facciaſi $= b$; ſicchè avendoſi l' analogia $LQ : QW :: r : \text{sen.} QLW$, cioè $b : \frac{a . \text{sen.} 2\mu . \cos. 3\mu}{r . \cos. \mu} :: r : \text{sen.} QLW$, ſarà $\text{sen.} QLW = \frac{a . \text{sen.} 2\mu . \cos. 3\mu}{b . \cos. \mu}$.

Ma il ſeno dell' angolo *PLW* è uguale al ſeno di *WLB*, ovvero al coſeno di *LBX*, cioè a $\cos. \mu$, onde l' altra analogia $\text{sen.} PLW : \text{sen.} QLW :: QL : LP$ darà $LP = \frac{a . \text{sen.} 2\mu . \cos. 3\mu}{(\cos. \mu)^2}$ e così ſarà noto lo sfiancamento della moſſa; il che ecc.

PROBLEMA 3. PROPOSIZIONE 3.

Se fra i pilaſtri di un Arco intero ſia meſſa la centina, poi da una parte la moſſa e due cunei, ritrovare la preſſione eſercitata dall' uno e dall' altro cuneo ſulla centina, e la ſpinta relativa dell' ultimo cuneo ſulla moſſa.

Fra i pilaſtri di un Arco intero ſia meſſa la centina *Aa*, poi ſopra un pilaſtro *AT* la moſſa *AB* e i due cunei *BC CD*: biſogna ritrovare la preſſione dell' uno e dell' altro cuneo *BC CD* ſulla centina, e la ſpinta relativa dell' ultimo cuneo ſulla moſſa. Fig. IX. Tav. II. Dif. XVI. Lib. I.

Si prendano i centri di gravità *I G F* della moſſa e de' cunei, e ſi giungano i raggi tutti della Figura, e le *FG GI* che ſaranno perpendicolari alle *EX EB*: indi dai punti *F G I* ſi tirino le verticali *FK GN IZ* uguali fra loro, ch' eſprimano le gravità de' cunei e della moſſa. E' manifeſto che terminato il parallelogrammo *FLKV*, eſprimerà *FV* la preſſione del cuneo *CD* ſulla centina *Aa*, e *FL* la ſua preſſione ſul cuneo inferiore *BC*. Si prolunghi pertanto la *FG* in *O*, e fatta *GO* uguale a *FL* ſi compia il parallelogrammo *GOMN*, e ſi uniſca *GM*: dico in prima che *GM* cade tra le *GI GE*. Prop. 20 Lib. I.

Imperciocchè, compiuto il parallelogrammo *FLbK*, eſſendo l' angolo *LFV* maggiore dell' angolo *KFV*, e amendue minori di un retto, ſarà il ſeno dell' angolo *LFV*, ovvero dell' angolo *FLK*, maggiore del ſeno dell' angolo *KFV*, o dell' angolo *LKF*; ma come il ſeno dell' angolo *FLK* al ſeno dell' angolo *LKF*, così è la *FK* alla *FL*; dunque la *FK* è maggiore della *FL*, cioè della *Kb*; e per conſeguenza anche l' angolo *FbK*, cioè *LFb*, è maggiore dell' angolo *bFK*; laonde l' angolo *LFb* è maggiore della metà dell' angolo intero *LFK*. In oltre eſſendo la *OG* uguale e per diritto alla *FL*, e la *Lb* uguale e parallela alla *OM*, ſarà la *Fb* uguale e parallela alla *GM*, e l' angolo *LFb* ſarà uguale all' angolo *OGM*; dunque l' angolo *OGM* ſarà pure maggiore della metà dell' angolo *LFK*, ovvero dell' angolo *OGN*. Di nuovo perchè l' uno

è l' altro degli angoli *GcE GdE* è retto, faranno uguali a due retti gli angoli rimanenti *cEd cGd* del quadrilatero *cEdG*; ma sono uguali a due retti anche gli angoli *OGc cGd*; laonde, tolto il comune, resterà l' angolo *OGc* uguale all' angolo *cEd*. Perchè poi l' angolo retto *Gcb* è uguale all' angolo retto *bmE*, e l' angolo al vertice *cbG* è uguale all' angolo al vertice *mbE*, sarà l' angolo rimanente *cGb* uguale all' angolo *bEm*, ovvero all' angolo *cEd*: ma anche l' angolo *OGc* s' è provato uguale all' angolo medesimo *cEd*; dunque l' angolo *OGc* è uguale all' angolo *cGb*; e perciò l' angolo *OGc* è la metà dell' angolo *OGN*: si è poi antecedentemente dimostrato, che l' angolo *OGM* è maggiore della metà dell' angolo *OGN*; laonde l' angolo *OGM* è maggiore dell' angolo *OGc*, e per conseguenza la *GM* cade fra le rette *GI GE*.

Quindi, compiuto il parallelogrammo *GHMP*, essendo il cuneo *BC* tirato dalla forza composta *GM* per una direzione, che sta di mezzo alle *GI GE*, che sono perpendicolari alla
Prop. 19 Lib. I. e Cor. superficie superiore *Bb* della mossa e alla centina *Aa*, resterà il cuneo fra esse superficie appoggiato; e però esprimerà *GP* la pressione esercitata dal cuneo *BC* sulla centina, e *GH* la spinta relativa con cui vien caricata la mossa.

COROLLARIO.

Anche da questa proposizione la necessità apparisce della Domanda IV, avvegnachè fatta *IQ* uguale a *GH*, sarà la mossa *AB* premuta dalla forza *IQ*, oltre a quella della propria gravità *IZ*; onde non potrebbe star ferma la mossa senza un
Prop. 21 Lib. I. qualche rattenimento, per esempio senza la sopraccentina. Ma questa supposta se si prolunghi la *EI* in *n*, e si formino i parallelogrammi *IQeZ Ineg*, dinoterà *Ig* la spinta rela-
Prop. 20 Lib. I. tiva della mossa, e *In* la quantità dello sfiancamento della mossa, o la sua pressione sulla sopraccentina; che basterà sia
Corol. Prop. 21 Lib. I. per poco superiore al punto *k* se la *Ie* passi per la base *Ak* della mossa, e altrimenti dovrà essere la sopraccentina un poco più alta del punto d' intersecazione.

PROBLEMA

PROBLEMA 4. PROPOSIZIONE 4.

Date le cose come nell' antecedente, si domanda il valore analitico della pressione de' due cunei sulla centina, e dello sfiancamento della mossa.

Siano come nella Prop. 2. le gravità *IZ GN FK* de' cunei *AB BC CD* uguali ad a; l' angolo *BEA* al centro di un cuneo $= 2\mu$; e il raggio delle Tavole $= r$: dimostrerassi come nella Proposizione suddetta, che l' angolo *LFK* è uguale all' angolo *CEA* o sia a 4μ, e l' angolo *IGS* uguale a *BEA*, ovvero a 2μ. Fig. IX. Tav. II.

E poichè sta come il seno dell' angolo *KLF*, o dell' angolo *LFV* al seno dell' angolo *LFK*, così la *FK* alla *FV*, sarà, sostituendo le lettere, $\cos.\mu : \text{sen.}\,4\mu :: a : FV$, dunque la pressione *FV* del primo cuneo *CD* sulla centina è $= \frac{a\,.\,\text{sen.}\,4\mu}{\cos.\mu}$.
Di nuovo essendo come il seno dell'angolo *LFV* al seno dell' angolo *KFV*, così la *FK* alla *FL*; il seno poi dell' angolo *KFV* è uguale al coseno dell' angolo *FEA*, cioè a $\cos.5\mu$; laonde sarà $\cos.\mu : \cos.5\mu :: a : FL$; e però $FL = GO = MN = \frac{a\,.\,\cos.5\mu}{\cos.\mu}$. Ora si conduca dal punto *M* la *MS* perpendicolare a *Gm*: e perchè come il seno tutto al seno dell' angolo *MNS*, così è la *MN* alla *MS*, e l' angolo *MNS* è uguale all' angolo *OGN*, o sia all' angolo *LFK* o a 4μ; dunque $r : \text{sen.}\,4\mu :: \frac{a\,.\,\cos.5\mu}{\cos.\mu} : MS = \frac{a\,.\,\text{sen.}\,4\mu\,.\,\cos.5\mu}{r\,.\,\cos.\mu}$. Similmente essendo come il seno tutto al coseno dell' angolo *MNS*, così la *MN* alla *NS*, ovvero $r : \cos.4\mu :: \frac{a\,.\,\cos.5\mu}{\cos.\mu} : NS$, sarà $NS = \frac{a\,.\,\cos.4\mu\,.\,\cos.5\mu}{r\,.\,\cos.\mu}$, la *GN* poi è $= a$, dunque tutta $GS =$

$a + \frac{a \,.\, \text{cos.}\, 4\mu \,.\, \text{cos.}\, 5\mu}{r \,.\, \text{cos.}\, \mu}$. Per la qual cosa $GM = \sqrt{((MS)^2 + (GS)^2)} = \sqrt{\left(\left(\frac{a \,.\, \text{sen.}\, 4\mu \,.\, \text{cos.}\, 5\mu}{r \,.\, \text{cos.}\, \mu}\right)^2 + \left(a + \frac{a \,.\, \text{cos.}\, 4\mu \,.\, \text{cos.}\, 5\mu}{r \,.\, \text{cos.}\, \mu}\right)^2\right)}$, la qual quantità si chiami $= b$, sicchè $GM = b$: onde nel triangolo rettangolo *GMS* avendosi come *GM* a *GS*, così il seno tutto al coseno dell' angolo *MGS*, ovvero sostituendo $b : a + \frac{a \,.\, \text{cos.}\, 4\mu \,.\, \text{cos.}\, 5\mu}{r \,.\, \text{cos.}\, \mu} :: r : \text{cos.}\, MGS$, sarà $\text{cos.}\, MGS = \frac{ar}{b} + \frac{a \,.\, \text{cos.}\, 4\mu \,.\, \text{cos.}\, 5\mu}{b \,.\, \text{cos.}\, \mu}$; e allo stesso modo coll' analogia $GM : MS :: r : \text{sen.}\, MGS$, cioè $b : \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 4\mu \,.\, \text{cos.}\, 5\mu}{r \,.\, \text{cos.}\, \mu} :: r : \text{sen.}\, MGS$, si troverà $\text{sen.}\, MGS = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 4\mu \,.\, \text{cos.}\, 5\mu}{b \,.\, \text{cos.}\, \mu}$. Avvertasi ancora che il seno dell' angolo *NGP* è uguale al coseno dell' angolo *GEA*, e viceversa il coseno di *NGP* è uguale al seno di *GEA*; dunque $\text{sen.}\, NGP = \text{cos.}\, 3\mu$, e $\text{cos.}\, NGP = \text{sen.}\, 3\mu$: sicchè essendo dati i seni e i coseni degli angoli *MGS NGP*, si troverà per

Prop. 7 Lib. I. l' equazione I. il seno della loro somma *MGP*, e però sarà $\text{sen.}\, MGP = \frac{\text{sen.}\, MGS \,.\, \text{cos.}\, NGP}{r} + \frac{\text{cos.}\, MGS \,.\, \text{sen.}\, NGP}{r} = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 3\mu \,.\, \text{sen.}\, 4\mu \,.\, \text{cos.}\, 5\mu}{br \,.\, \text{cos.}\, \mu} + \frac{a \,.\, \text{cos.}\, 3\mu}{b} + \frac{a \,.\, \text{cos.}\, 3\mu \,.\, \text{cos.}\, 4\mu \,.\, \text{cos.}\, 5\mu}{br \,.\, \text{cos.}\, \mu}$:

Luog. cit. ma per l'equazione IV si ha ancora $\text{cos.}\, \mu = \frac{\text{cos.}\, 3\mu \,.\, \text{cos.}\, 4\mu}{r} + \frac{\text{sen.}\, 3\mu \,.\, \text{sen.}\, 4\mu}{r}$; laonde $\text{sen.}\, MGP = \frac{a \,.\, \text{cos.}\, 3\mu}{b} + \frac{a \,.\, \text{cos.}\, \mu \,.\, \text{cos.}\, 5\mu}{b \,.\, \text{cos.}\, \mu} = \frac{a}{b}(\text{cos.}\, 3\mu + \text{cos.}\, 5\mu)$.

Di nuovo essendo l' angolo *HGN* uguale all' angolo *BEA* $= 2\mu$, sarà $\text{sen.}\, HGN = \text{sen.}\, 2\mu$, e $\text{cos.}\, HGN = \text{cos.}\, 2\mu$; quindi per l' equazione II dati i seni e coseni degli angoli *HGN MGS* si troverà il seno della loro differenza *HGM*; e sarà

$\text{sen. } HGM = \frac{\text{sen. } HGN . \cos. MGS}{r} - \frac{\cos. HGN . \text{sen. } MGS}{r} = \frac{a . \text{sen. } 2\mu}{b}$
$+ \frac{a . \text{sen. } 2\mu . \cos. 4\mu . \cos. 5\mu}{br . \cos. \mu} - \frac{a . \cos. 2\mu . \text{sen. } 4\mu . \cos. 5\mu}{br . \cos. \mu}$: ma per l' equazione medesima si ha $\text{sen. } 2\mu = \frac{\text{sen. } 4\mu . \cos. 2\mu}{r} - \frac{\cos. 4\mu . \text{sen. } 2\mu}{r}$; però $\text{sen. } HGM = \frac{a . \text{sen. } 2\mu}{b} - \frac{a . \text{sen. } 2\mu . \cos. 5\mu}{b . \cos. \mu}$.

Poste queste cose perchè sta come il seno dell'angolo HGP al seno dell' angolo HGM, così la GM alla GP; il seno poi dell' angolo HGP è uguale al coseno di GEc, starà ancora, sostituendo, $\cos. \mu : \frac{a . \text{sen. } 2\mu}{b} - \frac{a . \text{sen. } 2\mu . \cos. 5\mu}{b . \cos. \mu} :: b : GP$; e però $GP = \frac{a . \text{sen. } 2\mu}{\cos. \mu} - \frac{a . \text{sen. } 2\mu . \cos. 5\mu}{(\cos. \mu)^2}$, e per tal modo sarà data la pressione del secondo cuneo BC sulla centina. Oltre a ciò essendo $\text{sen. } HGP : \text{sen. } MGP :: GM : GH$, s' avrà $\cos. \mu : \frac{a(\cos. 3\mu + \cos. 5\mu)}{b} :: b : GH$, laonde $GH = IQ = eZ = \frac{a(\cos. 3\mu + \cos. 5\mu)}{\cos. \mu}$; ed è la $IZ = a$, e l' angolo $QIZ = HGN = 2\mu$, dunque operando allo stesso modo si troverà prima la Ie e poi lo sfiancamento In della mossa, e sarà $In = \frac{a . \text{sen. } 2\mu (\cos. 3\mu + \cos. 5\mu)}{(\cos. \mu)^2}$; il che ecc.

PROBLEMA 5. PROPOSIZIONE 5.

Se fra i pilastri di un Arco intero sia posta la centina, poi da una parte si pongano la mossa e tre conj; ritrovare le pressioni esercitate da ciascuno di essi sulla centina, e la spinta relativa dell' ultimo cuneo sulla mossa.

Fig. X. Tav. II. Fra i pilastri di un Arco intero sia collocata la centina *MX*, poi sul pilastro *MZ* la mossa *MV* e i tre conj *VQ QS SX*: bisogna determinare la pressione de' cunei *VQ QS SX* sulla centina, e la spinta relativa dell' ultimo cuneo sulla mossa.

Si prendano i centri di gravità *A D F R* de' cunei e della mossa, e si giungano i raggi della Figura e le rette *AD DF FR*, le quali saranno perpendicolari ai raggi *OS OQ OV*. Si conducano poscia le verticali *AB DE FN RT* uguali fra loro, le quali esprimano le gravità de' cunei e della mossa, e si compia il parallelogrammo *ACBY*. Per le cose dimostrate la retta *AY* dinoterà la pressione del cuneo superiore *SX* sulla centina, e *AC* la sua pressione sull' inferiore *QS*. Prop. 20 Lib. I.

Si prolunghi pertanto la *AD* e sia il prolungamento *DH* uguale alla *AC*, e dalle rette *DH DE* sia costruito il parallelogrammo *DHGE*. Si dimostrerà come nella Prop. 3 che l' angolo *HDG* è maggiore della metà dell' angolo *HDE*; laddove essendo l' angolo *QOS* ovvero *HDF* il terzo dell' angolo *SOM*, o di *CAB*, cioè di *HDE*, diventa *HDF* minore della metà di *HDE*; dunque l' angolo *HDG* è maggiore dell' angolo *HDF*, e per conseguenza la retta *DG* cade fra le *DF DK*; onde compiuto il parallelogrammo *DIGK*, esprimerà *DK* la pressione del secondo cuneo *QS* sulla centina, e *DI* la sua spinta relativa sul terzo cuneo *VQ*. Ora si prolunghi la *DI* in *L* facendo *FL* uguale a *DI*, e dalle *FL FN* si costruisca il parallelogrammo *FLWN*, del quale *FW* sia la diagonale. Corol. Prop. cit.

Tre casi qui possono accadere, cioè o la *FW* cade fuori dell' angolo *RFO*, o di mezzo alle *FR FO*, o finalmente sulla stessa *FR*. Se cade di fuori, come nella Figura, compiuto il parallelogrammo *FPWa*, il punto *P* cadrà nella *OF* prolungata, e sarà segno che il terzo cuneo non preme la centina, ma all' incontro sfianca, e sarà espressa da *FP* la quantità dello sfiancamento il quale verrà sostenuto dalla sopraccentina: se poi la *FW* cade di mezzo alle *FR FO*, compiuto al solito il parallelogrammo, cadrà il punto *P* tra *F O*, e si troverà la pressione del terzo cuneo sulla centina; ed in amendue i casi *Fa* esprimerà la spinta relativa dell' ultimo cuneo sulla mossa. Se finalmente la *FW* cade precisamente sulla *FR*, vorrà dire che il cuneo *VQ* nè preme la centina nè sfianca

o paſſa a premere la ſopraccentina, ma che tutta la forza *FW* ſi eſercita contro la moſſa e diventa ſpinta relativa del cuneo medeſimo *VQ*; il che ecc.

Corollario.

Prolungando la *Fa* in *b* finchè *Rb* ſia uguale a *Fa*; eſſendo la moſſa *MV* tirata dalle due forze *Rb RΓ* e ſoſtenuta dalla ſopraccentina e dal pilaſtro, ſarà d' uopo prima comporre inſieme queſte forze, e poi dividere la forza compoſta nel modo ſolito, per trovare la ſpinta relativa della moſſa ſul pilaſtro, e il ſuo sfiancamento o la ſua preſſione nella ſopraccentina. Queſta ſopraccentina poi nel primo de' tre caſi contemplati nella Propoſizione non dovrà eſſere inferiore al punto *V* ſe *FW* ſeghi la baſe *Vz* del cuneo *VQ*, e ſe tagliaſſe la ſopraccentina ſopra *V* converrebbe farla più alta del punto d' interſecazione: ma negli altri due caſi, o dovrà la ſopraccentina eſſere ſolo alquanto ſuperiore al punto *e*, o non al di ſotto del ſuo concorſo colla direzione della forza compoſta delle *Rb RΓ*, ſecondo che eſſa direzione incontri o no la baſe inferiore *eM* della moſſa. Quindi dal fin qui detto, come ancora dalle coſe che ſi diranno in appreſſo, la ragione appariſce della Domanda IV, ſenza la quale, cioè ſenza la ſuppoſizione delle ſopraccentine attaccate ſolidamente a' pilaſtri e ſecondanti la curvatura eſteriore dell' Arco, togliendoſi ogni equilibrio, e ſuccedendo neceſſariamente un movimento ne' cunei inferiori e nella moſſa, ſi leva l' occaſione e l' adito di ſoggettare al calcolo le preſſioni de' ſuperiori ſulla centina. Egli è il vero che qualche volta eſſe rieſcono inutili; ma quando ciò ſia lo vedremo a ſuo luogo.

Corol. Prop. 21 Lib. I.

PROBLEMA 6. PROPOSIZIONE 6.

Date le ſteſſe coſe come nell' antecedente, ſi domanda il valore analitico delle preſſioni

de' cunei fulla centina, e degli sfiancamenti o delle pressioni fulla sopraccentina.

Fig. X. Tav. II. Si ritengano le folite denominazioni, cioè l' angolo *VOM* $= 2\mu$, il raggio delle Tavole $= r$, e le linee *AB DE FN RT* ch' esprimono le gravità rispettive de' cunei $= a$: si proverà come nella Prop. 2, che l' angolo *CAB* è $= 6\mu$, l' angolo $FDE = 4\mu$, e l' angolo $RFN = 2\mu$.

E poichè sen. CAT : sen. CAB : : $AB : AT$, farà fostituendo $\cos.\mu : \text{sen.}\, 6\mu :: a : AT = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu}{\cos.\, \mu}$, e questa farà l' espressione della forza ch' impiega il primo cuneo superiore *SX* per premere la centina: fimilmente essendo sen. CAT : sen. BAT : : $AB : AC$, ossia $\cos.\mu : \cos.7\mu :: a : AC$, s' avrà la pressione *AC* ful fecondo cuneo, ovvero $DH = \frac{a \,.\, \cos.\, 7\mu}{\cos.\, \mu} = GE$. Ora, condotta la perpendicolare *Gb*, perchè sta $GE : Gb :: r : \text{sen.}\, GEb$, e l' angolo $GEb = HDE = DAB = 6\mu$, farà $\frac{a \,.\, \cos.\, 7\mu}{\cos.\, \mu} : Gb :: r : \text{sen.}\, 6\mu$; e però $Gb = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{r \,.\, \cos.\, \mu}$; ma la *Eb* si troverà $= \frac{a \,.\, \cos.\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{r \,.\, \cos.\, \mu}$, onde la $Db = a + \frac{a \,.\, \cos.\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{r \,.\, \cos.\, \mu}$; e per conseguenza farà l' ipotenusa $DG = \sqrt{\left((Db)^2 + (Gb)^2\right)}$ $= \sqrt{\left(\left(a + \frac{a \,.\, \cos.\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{r \,.\, \cos.\, \mu}\right)^2 + \left(\frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{r \,.\, \cos.\, \mu}\right)^2\right)}$, e questa quantità sia $= b$, cioè $DG = b$. Di nuovo perchè $DG : Db :: r : \cos.\, GDb$, farà $b : a + \frac{a \,.\, \cos.\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{r \,.\, \cos.\, \mu} :: r : \cos.\, GDb$ $= \frac{ar}{b} + \frac{a \,.\, \cos.\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{b \,.\, \cos.\, \mu}$; e allo stesso modo l' analogia $DG : Gb :: r : \text{sen.}\, GDb$ dà $\text{sen.}\, GDb = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu \,.\, \cos.\, 7\mu}{b \,.\, \cos.\, \mu}$. Ritrovato il feno e il cofeno dell' angolo *GDb*, ficcome è dato ancora il feno e il cofeno dell' angolo *EDK* (avvegnachè sen. *EDK*

$= \cos. 5\mu$, e $\cos. EDK = \text{sen}. 5\mu$) così si determinerà col mezzo della equazione I. il seno della loro somma GDK: sarà dunque sen. $GDK = \frac{a . \text{sen}. 5\mu . \text{sen}. 6\mu . \cos. 7\mu}{br . \cos. \mu} + \frac{a . \cos. 5\mu}{b}$ Prop. 7 Lib. I.

$+ \frac{a . \cos. 5\mu . \cos. 6\mu . \cos. 7\mu}{br . \cos. \mu}$; ma per l' equazione IV. si ha sen. 5μ . sen. $6\mu + \cos. 5\mu . \cos. 6\mu = r . \cos. \mu$, laonde sen. GDK $= \frac{a . \cos. 5\mu}{b} + \frac{a . \cos. 7\mu}{b} = \frac{a . (\cos. 5\mu + \cos. 7\mu)}{b}$. Così dati i seni ed i coseni degli angoli FDE GDb, si troverà il seno della loro differenza IDG, onde sarà sen. $IDG = \frac{a . \text{sen}. 4\mu}{b}$ $+ \frac{a . \text{sen}. 4\mu . \cos. 6\mu . \cos. 7\mu}{br . \cos. \mu} - \frac{a . \cos. 4\mu . \text{sen}. 6\mu . \cos. 7\mu}{br . \cos. \mu} =$ $\frac{a . \text{sen}. 4\mu}{b} + \frac{a . \cos. 7\mu}{br . \cos. \mu} . (\text{sen}. 4\mu . \cos. 6\mu - \cos. 4\mu . \text{sen}. 6\mu) =$ $\frac{a . \text{sen}. 4\mu}{b} - \frac{a . \text{sen}. 2\mu . \cos. 7\mu}{b . \cos. \mu}$. Per la qual cosa essendo certo, che sen. IDK : sen. $IDG :: DG : DK$, ovvero $\cos. \mu : \frac{a . \text{sen}. 4\mu}{b} -$ $\frac{a . \text{sen}. 2\mu . \cos. 7\mu}{b . \cos. \mu} :: b : DK$, s' avrà DK o la pressione del secondo cuneo QS sulla centina $= \frac{a . \text{sen}. 4\mu}{\cos. \mu} - \frac{a . \text{sen}. 2\mu . \cos. 7\mu}{(\cos. \mu)^2}$: sta poi ancora sen. IDK : sen. $GDK :: DG : DI$, cioè $\cos. \mu$: $\frac{a (\cos. 5\mu + \cos. 7\mu)}{b} :: b : DI$, dunque $DI = \frac{a (\cos. 5\mu + \cos. 7\mu)}{\cos. \mu}$ $= FL = WN$.

Passando col calcolo sul terzo cuneo VQ, si supporrà essersi verificato il primo de' tre casi contemplati nella Proposizione precedente, cioè che la FW cada fuori dell' angolo RFO, nel qual caso si è provato che il cuneo non preme la centina, ma sfianca ossia preme in suo luogo la sopraccentina. Si conduca pertanto la Wg perpendicolare alla direzione FN: e perchè sta $WN : Wg :: r : \text{sen}. WNg$, ed è l' angolo $WNg = FDE =$

4μ, farà sostituendo $\frac{a(\text{cos. }5\mu + \text{cos. }7\mu)}{\text{cos. }\mu} : Wg :: r : \text{sen. }4\mu$; e però $Wg = \frac{a\,.\,\text{sen. }4\mu(\text{cos. }5\mu + \text{cos. }7\mu)}{r\,.\,\text{cos. }\mu}$: ma la Ng si troverà $= \frac{a\,.\,\text{cos. }4\mu(\text{cos. }5\mu + \text{cos. }7\mu)}{r\,.\,\text{cos. }\mu}$; e per conseguenza tutta la $Fg = a + \frac{a\,.\,\text{cos. }4\mu(\text{cos. }5\mu + \text{cos. }7\mu)}{r\,.\,\text{cos. }\mu}$: dati poi i lati Wg Fg del triangolo rettangolo FgW sarà data anche l' ipotenusa FW, che si chiami $= d$, sicchè l' analogia di $FW : Wg :: r :$ sen. WFg ci darà sen. $WFg = \frac{a\,.\,\text{sen. }4\mu(\text{cos. }5\mu + \text{cos. }7\mu)}{d\,.\,\text{cos. }\mu}$, e l'altra $FW : Fg :: r :$cos. WFg somministrerà cos. $WFg = \frac{ar}{d} + \frac{a\,.\,\text{cos. }4\mu(\text{cos. }5\mu + \text{cos. }7\mu)}{d\,.\,\text{cos. }\mu}$. E poichè sen. $NFO =$ cos. 3μ, e cos. $NFO =$ sen. 3μ, e si è testè ritrovato anche il seno e il coseno dell'angolo WFg, dunque sarà il seno della loro somma WFO, o sen. $WFP = \frac{a.\,\text{sen. }3\mu\,.\,\text{sen. }4\mu(\text{cos. }5\mu + \text{cos. }7\mu)}{dr\,.\,\text{cos. }\mu} + \frac{a\,.\,\text{cos. }3\mu}{.d} + \frac{a\,.\,\text{cos. }3\mu\,.\,\text{cos. }4\mu(\text{cos. }5\mu + \text{cos. }7\mu)}{dr\,.\,\text{cos. }\mu} = \frac{a\,.\,\text{cos. }3\mu}{d} + \frac{a(\text{cos. }5\mu + \text{cos. }7\mu)}{dr\,.\,\text{cos. }\mu}\,.\,(\text{sen. }3\mu\,.\,\text{sen. }4\mu + \text{cos. }3\mu\,.\,\text{cos. }4\mu)$, o $= \frac{a\,.\,\text{cos. }3\mu}{d} + \frac{a(\text{cos. }5\mu + \text{cos. }7\mu)}{d}$, o finalmente sen. $WFP = \frac{a(\text{cos. }3\mu + \text{cos. }5\mu + \text{cos. }7\mu)}{d}$. Di nuovo perchè sen. $RFN =$ sen. 2μ, e cos. $RFN =$ cos. 2μ, ed è dato anche il seno e il coseno dell' angolo WFg, dunque sarà il seno della loro differenza, cioè sen. $WFa = \frac{a\,.\,\text{cos. }2\mu\,.\,\text{sen. }4\mu(\text{cos. }5\mu + \text{cos. }7\mu)}{dr\,.\,\text{cos. }\mu} - \frac{a\,.\,\text{sen. }2\mu}{d} - \frac{a\,.\,\text{sen. }2\mu\,.\,\text{cos. }4\mu(\text{cos. }5\mu + \text{cos. }7\mu)}{dr\,.\,\text{cos. }\mu} = -\frac{a.\text{sen.}2\mu}{d}$

$+ a\,.\,\text{sen. }2\mu$

$+ \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu\, (\cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{d \,.\, \cos.\, \mu}$. Si faccia ora quest' analogia sen. PFa (= sen. aFO = cos. μ) : sen. WFa : : $FW : FP$, per avere FP o lo sfiancamento del terzo cuneo VQ uguale a $-\frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}{\cos.\, \mu} + \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu\, (\cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{(\cos.\, \mu)^2}$.

Se nella Figura si verificasse il secondo caso, e la retta FW cadesse fra le FR FO, si troverebbe allora in simil guisa la pressione del terzo cuneo sulla centina $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}{\cos.\, \mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu\, (\cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{(\cos.\, \mu)^2}$, come calcolando si può riconoscere; cioè la stessa quantità di prima ma co' segni cangiati. Per la qual cosa unendo insieme i due casi si potrà dire che la pressione del terzo cuneo sulla centina è $= -\frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu}{\cos.\, \mu} + \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu\, (\cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{(\cos.\, \mu)^2}$, con quest' avvertenza però che quando la quantità negativa di questo binomio supera la positiva, allora sarà indizio che la pressione del terzo cuneo sulla centina è negativa, ovvero ch' egli sfianca, e il suo sfiancamento sarà uguale alla differenza delle quantità suddette, o al binomio, co' segni cangiati.

Si determinerà poi la spinta relativa Fa dell' ultimo cuneo facendo come sen. PFa : sen. WFP : : $FW : Fa$, ovvero cos. μ : $\frac{a\, (\cos.\, 3\mu + \cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{d}$: : $d : Fa$, onde sarà $Fa = Rb = \frac{a\, (\cos.\, 3\mu + \cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{\cos.\, \mu}$; e indi seguitando ad operare, come si è fatto finora, si troverà finalmente lo sfiancamento della mossa $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2\mu\, (\cos.\, 3\mu + \cos.\, 5\mu + \cos.\, 7\mu)}{(\cos.\, \mu)^2}$; il che ecc.

Corollario.

Quando la FW cade fuori dell' angolo RFO, cioè nel caso primo, s'è trovata la $FP = -\frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu}{\text{cos.}\,\mu} + \frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu(\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu)}{(\text{cos.}\,\mu)^2}$; e nel caso secondo quando cade fra le FR FO diventa la $FP = \frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu}{\text{cos.}\,\mu} - \frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu(\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu)}{(\text{cos.}\,\mu)^2}$, cioè la stessa quantità di prima, ma coi segni cangiati: laonde quando la FP sia $= 0$ e la linea WF cada sopra Fa avrassi il terzo caso contemplato nell' antecedente Proposizione. Perchè dunque possa un tal caso verificarsi dovrà certo valere quest' equazione $\frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu}{\text{cos.}\,\mu} = \frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu(\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu)}{(\text{cos.}\,\mu)^2}$, ovvero, dividendo l' uno e l' altro membro per $\frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu}{(\text{cos.}\,\mu)^2}$, dovrà essere $\text{cos.}\,\mu =$
Prop. 7 Lib. I. $\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu$: ma per l' equazione VII. $\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu = \frac{2\,.\,\text{cos.}\,\mu\,.\,\text{cos.}\,6\mu}{r}$; e però $\text{cos.}\,\mu = \frac{2\,.\,\text{cos.}\,\mu\,.\,\text{cos.}\,6\mu}{r}$, vale a dire $\text{cos.}\,6\mu = \frac{r}{2}$: ma l' angolo il di cui coseno è uguale alla metà del raggio è di 60°; dunque $6\mu = 60°$, e però $2\mu = 20°$; quindi l' angolo al centro del cuneo debbe essere in questo caso di 20°; e per conseguenza il numero de' pezzi componenti l' Arco intero debbe essere nove, cioè due mosse, tre conj per parte, e il serraglio nella sommità. E siccome il serraglio dell' Arco (per le cose che si diranno in appresso) è tutto sostenuto dalla centina, e non aggrava per nessun conto i cunei laterali; così sarà certa questa notabile verità, cioè che adattati alla centina i nove pezzi costituenti un Arco a tutto sesto, i primi cinque cunei superiori, compreso il serraglio, aggravano la centina, i due susseguenti uno per parte nè premono la centina nè sfiancano, e le sole mosse soffrono sfiancamento.

PROBLEMA 7. PROPOSIZIONE 7.

Se fra i pilaſtri di un Arco intero ſia meſſa la centina, poi da una parte la moſſa e quattro conj; ritrovare la preſſione eſercitata da queſti ſulla centina, e la ſpinta relativa dell' ultimo.

Tra i pilaſtri di un Arco a tutto ſeſto ſia collocata la centina *Aq*, poi ſul pilaſtro *AZ* la moſſa *AB*, indi i quattro cunei *BC CD DE EF*: biſogna ritrovare le preſſioni da eſſi eſercitate ſulla centina, e la ſpinta relativa dell' ultimo *BC* ſulla moſſa *AB*. Fig. XI. Tav. II.

Si prendano i centri di gravità *H I K L W* de' cunei e della moſſa, e ſi uniſcano le *HI IK KL LW* e tutti i raggi della Figura: indi ſi tirino le verticali *HM IN KO LP Wp* uguali fra loro, che rappreſentino le gravità de' cunei, e ſi compia il parallelogrammo *HQMR*.

Sarà *HR* uguale alla preſſione del primo cuneo ſuperiore *EF* ſulla centina *Aq*, e *HQ* eſprimerà la ſua preſſione ſul ſecondo cuneo *DE*. Si prolunghi dunque *HI* in *S*, e fatta *IS* uguale a *HQ*, ſi compia il parallelogrammo *ISΓN* di cui *IΓ* ſia la diagonale. Si dimoſtrerà come nella Prop. 3 l' angolo *SIΓ* maggiore della metà dell' angolo *SIN*: all' incontro eſſendo l' angolo *SIK* uguale a *DGE*, e l' angolo *KIN* uguale a *DGA*, l' angolo poi *DGE* è la terza parte dell' angolo *DGA*, ſarà ancora l' angolo *SIK* il terzo dell' angolo *KIN*, e però il quarto di tutto *SIN*; laonde l' angolo *SIΓ* è maggiore di *SIK*, e per conſeguenza la *IΓ* cade di mezzo alle *IK IN*, e però anche alle *IK Ix*: onde compiuto il parallelogrammo *IVTx* eſprimerà *Ix* la preſſione eſercitata dal ſecondo cuneo *DE* ſulla centina, e *IV* la ſua ſpinta relativa ſul terzo cuneo *CD*. Di nuovo ſi prolunghi la *IK* in *Y*, e fatta *KY* uguale alla *IV*, ſi coſtruiſca il parallelogrammo *KYaO*, e ſi tiri la ſua diagonale *Ka*. Si proverà nello Scolio I della Prop. ſuſſeguente che la *Ka* cade di mezzo alle *Kb Kc*, ſicchè compiuto il parallelogrammo *Kbac*, dalla *Kc* ſarà eſpreſſa la preſ- Prop. 20 Lib. I.

fione del terzo cuneo *CD* fulla centina, e dalla *Xb* la fua fpinta relativa ful quarto cuneo *BC*. Ora fi faccia *Ld* uguale a *Xb*, e dalle *Ld LP* fi coftruifca il parallelogrammo *LdeP* e fi giunga la diagonale *Le*, la quale cadrà fuori dell' angolo *WLG* (per quanto fi dimoftrerà nello Scolio 2 della fuffeguente Prop.) indi fi compia il parallelogrammo *Luem*: dinoterà *Ln* lo sfiancamento del quarto cuneo *BC*, e *Lm* la fua fpinta relativa fulla moffa *AB*; il che ecc.

Corollario.

Prolungando *Lm* in *k* finchè *Wk* fia uguale a *Lm*, fe fi comporranno infieme le due forze *Wk Wp*, e poi fi divideranno al folito, troveraffi la quantità dello sfiancamento della moffa *AB*.

PROBLEMA 8. PROPOSIZIONE 8.

Date le cofe medefime dell' antecedente, ritrovare i valori analitici della preffione de' tre cunei fuperiori fulla centina, e gli sfiancamenti del quarto cuneo e della moffa.

Fig. XI. Tav. II. Sieno al folito le gravità de' cunei e della moffa, cioè le *HM IN KO LP Wp* uguali ad a, il raggio delle Tavole $= r$, e l' angolo *BGA* al centro di un cuneo $= 2\mu$: farà per la rifoluzione del triangolo *HQM*, la *QM* ovvero la preffione *HR* del primo cuneo fuperiore *EF* fulla centina $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\ 8\mu}{\cos.\ \mu}$, e la $HQ = IS = TN = \frac{a \,.\, \cos.\ 9\mu}{\cos.\ \mu}$. Rifolvendo poi il triangolo rettangolo *TNb* fi troverà $Nb = \frac{a \,.\, \cos.\ 8\mu \,.\, \cos.\ 9\mu}{r \,.\, \cos.\ \mu}$, e però tutta la *Ib* $= a + \frac{a \,.\, \cos.\ 8\mu \,.\, \cos.\ 9\mu}{r \,.\, \cos.\ \mu}$, ma la *Tb* farà $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\ 8\mu \,.\, \cos.\ 9\mu}{r \,.\, \cos.\ \mu}$,

quindi sen. TIb (fatta la $IT = b$) farà $= \frac{a . \text{sen}. 8\mu . \cos. 9\mu}{b . \cos. \mu}$; e cos. $TIb = \frac{ar}{b} + \frac{a . \cos. 8\mu . \cos. 9\mu}{b . \cos. \mu}$. Il feno poi dell' angolo $NIx = \cos. 7\mu$, e cos. $NIx = \text{sen}. 7\mu$; laonde dati i feni e i cofeni degli angoli TIb NIx fi troverà il feno della loro fomma, e farà sen. $TIx = \frac{a (\cos. 7\mu + \cos. 9\mu)}{b}$. Di nuovo effendo sen. $KIb = \text{sen}. 6\mu$, e cos. $KIb = \cos. 6\mu$, e s' è trovato anche il feno e il cofeno dell' angolo TIb, dunque fi potrà ottenere anche il feno della loro differenza; e però farà sen. $VIT = \frac{a . \text{sen}. 6\mu}{b} - \frac{a . \text{sen}. 2\mu . \cos. 9\mu}{b . \cos. \mu}$.

Per la qual cofa effendo cogniti i feni degli angoli VIx VIT, colla rifoluzione del triangolo VIT fi troverà la preffione Ix efercitata dal fecondo cuneo DE fulla centina, e farà $= \frac{a . \text{sen}. 6\mu}{\cos. \mu} - \frac{a . \text{sen}. 2\mu . \cos. 9\mu}{(\cos. \mu)^2}$, ma la di lui fpinta relativa ful terzo cuneo CD, cioè la $IV = XT = Oa$, fi renderà $= \frac{a (\cos. 7\mu + \cos. 9\mu)}{\cos. \mu}$. Ora fi rifolva il triangolo Oag per avere la $Og = \frac{a . \cos. 6\mu (\cos. 7\mu + \cos. 9\mu)}{r . \cos. \mu}$, dipoi tutta la $Kg = a + \frac{a . \cos. 6\mu (\cos. 7\mu + \cos. 9\mu)}{r . \cos. \mu}$, indi il lato rimanente $ag = \frac{a . \text{sen}. 6\mu (\cos. 7\mu + \cos. 9\mu)}{r . \cos. \mu}$: e però, fatta $Ka = d$, fi conseguirà cos. $aKg = \frac{ar}{d} + \frac{a . \cos. 6\mu (\cos. 7\mu + \cos. 9\mu)}{d . \cos. \mu}$, e sen. $aKg = \frac{a . \text{sen}. 6\mu (\cos. 7\mu + \cos. 9\mu)}{d . \cos. \mu}$; ma sen. $gKG = \cos. 5\mu$, e cos. $gKG = \text{sen}. 5\mu$; dunque dati i feni e i cofeni degli angoli aKg gKG fi troverà il feno della loro fomma $aKc = \frac{a (\cos. 5\mu + \cos. 7\mu + \cos. 9\mu)}{d}$. In oltre effendo sen. $LKg =$

sen. 4μ e cos. $LKg = \text{cos.}\,4\mu$, e s' è trovato anche il seno e il coseno dell' angolo aKg, dunque sarà dato anche il seno della loro differenza, quindi s' avrà sen. $bKa = \frac{a\,.\,\text{sen.}\,4\mu}{d} - \frac{a\,.\,\text{sen.}\,2\mu\,(\text{cos.}\,7\mu + \text{cos.}\,9\mu)}{d\,.\,\text{cos.}\,\mu}$. Essendosi pertanto ora determinati i valori de' seni degli angoli aKc bKa, con due analogie si determineranno pure le Kc Kb, per conseguenza s' avrà la pressione Kc del terzo cuneo CD sulla centina $= \frac{a\,.\,\text{sen.}\,4\mu}{\text{cos.}\,\mu} - \frac{a\,.\,\text{sen.}\,2\mu\,(\text{cos.}\,7\mu + \text{cos.}\,9\mu)}{(\text{cos.}\,\mu)^2}$, e la sua spinta relativa Kb sul quarto cuneo BC, ovvero $Ld = Pe = \frac{a(\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu + \text{cos.}\,9\mu)}{\text{cos.}\,\mu}$.

Fa d'uopo poi passare alla risoluzione del triangolo Per onde avere $Pr = \frac{a\,.\,\text{cos.}\,4\mu\,(\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu + \text{cos.}\,9\mu)}{r\,.\,\text{cos.}\,\mu}$, tutta la $Lr = a + \frac{a\,.\,\text{cos.}\,4\mu\,(\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu + \text{cos.}\,9\mu)}{r\,.\,\text{cos.}\,\mu}$, e il lato $er = \frac{a\,.\,\text{sen.}\,4\mu\,(\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu + \text{cos.}\,9\mu)}{r\,.\,\text{cos.}\,\mu}$; quindi se si faccia $Le = m$, sarà cos. $eLr = \frac{ar}{m} + \frac{a\,.\,\text{cos.}\,4\mu(\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu + \text{cos.}\,9\mu)}{m\,.\,\text{cos.}\,\mu}$, e sen. $eLr = \frac{a\,.\,\text{sen.}\,4\mu\,(\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu + \text{cos.}\,9\mu)}{m\,.\,\text{cos.}\,\mu}$: ma sen. $rLG = \text{cos.}\,3\mu$, e cos. $rLG = \text{sen.}\,3\mu$; laonde dati i seni e i coseni degli angoli eLr rLG, si troverà colla solita equazione I. il seno della loro somma, cioè sen. $eLG = \text{sen.}\,eLn = \frac{a(\text{cos.}\,3\mu + \text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu + \text{cos.}\,9\mu)}{m}$: e similmente essendo sen. $WLP = \text{sen.}\,2\mu$ e cos. $WLP = \text{cos.}\,2\mu$, si determinerà il seno della differenza degli angoli eLr WLP, e sarà sen. $eLm = -\frac{a\,.\,\text{sen.}\,2\mu}{m} + \frac{a\,.\,\text{sen.}\,2\mu(\text{cos.}\,5\mu + \text{cos.}\,7\mu + \text{cos.}\,9\mu)}{m\,\text{cos.}\,\mu}$.

Prop. 7 Lib. I.

Per fine dati i seni degli angoli eLn eLm si troverà il valore

dello sfiancamento *Ln* del quarto cuneo $BC = -\frac{a \,.\, \text{sen. } 2\mu}{\text{cos. } \mu} + \frac{a \,.\, \text{sen. } 2\mu \,(\text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu + \text{cos. } 9\mu)}{(\text{cos. } \mu)^2}$; ma la ſua ſpinta relativa *Lm* ſulla moſſa ſarà $= \frac{a(\text{cos. } 3\mu + \text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu + \text{cos. } 9\mu)}{\text{cos. } \mu}$: e allo ſteſſo modo operando ſarà lo sfiancamento della moſſa $= \frac{a \,.\, \text{sen. } 2\mu(\text{cos. } 3\mu + \text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu + \text{cos. } 9\mu)}{(\text{cos. } \mu)^2}$; il che ecc.

S c o l i o I.

Ci eravamo riſervati nella Propoſizione ſettima di dimoſtrare che la Ka *cade fra le* Kb Kc*, e per far queſto baſterà provare che il valore della* Kc*, teſtè ritrovato, è poſitivo. In fatti ſupponendoſi che la moſſa e i quattro cunei ſieno tutti poſti da una parte, ſarà* $\text{cos. } 2\mu > \text{cos. } 8\mu$ *(poichè negli angoli acuti all' angolo minore corriſponde il coſeno maggiore); e però anche* $\frac{2 \,.\, \text{cos. } \mu \text{ cos. } 2\mu}{r} > \frac{2 \,.\, \text{cos. } \mu \,.\, \text{cos. } 8\mu}{r}$ *: ma per l' equazione VII* $\frac{2 \,.\, \text{cos. } \mu \,.\, \text{cos. } 8\mu}{r} = \text{cos. } 7\mu + \text{cos. } 9\mu$, *laonde* $\frac{2 \,.\, \text{cos. } \mu \,.\, \text{cos. } 2\mu}{r} > \text{cos. } 7\mu + \text{cos. } 9\mu$; *e moltiplicando amendue i membri per* sen. 2μ, *ſarà pure vero che* $\frac{2 \,.\, \text{cos. } \mu \,.\, \text{sen. } 2\mu \,.\, \text{cos. } 2\mu}{r} > \text{sen. } 2\mu\,(\text{cos. } 7\mu + \text{cos. } 9\mu)$: *è poi per l' equazione I* $\frac{2 \,.\, \text{sen. } 2\mu \,.\, \text{cos. } 2\mu}{r} = \text{sen. } 4\mu$, *dunque* $\text{cos. } \mu \,.\, \text{sen. } 4\mu > \text{sen. } 2\mu \,.\, (\text{cos. } 7\mu + \text{cos. } 9\mu)$, *e per conſeguenza anche* $\frac{a \,.\, \text{sen. } 4\mu}{\text{cos. } \mu} > \frac{a \,.\, \text{sen. } 2\mu\,(\text{cos. } 7\mu + \text{cos. } 9\mu)}{(\text{cos. } \mu)^2}$; *e però la quantità* $\frac{a \,.\, \text{sen. } 4\mu}{\text{cos. } \mu} - \frac{a \,.\, \text{sen. } 2\mu\,(\text{cos. } 7\mu + \text{cos. } 9\mu)}{(\text{cos. } \mu)^2}$, *che s' è provata nella Propoſizione uguale a* Kc, *è poſitiva.* Prop. 7 Lib. I.

SCOLIO 2.

Resta da provare all' incontro, come abbiamo accennato nella Proposizione settima, che la retta Le *cade fuori dell' angolo* WLG; *ovvero, procedendo nello stesso modo dello Scolio antecedente, converrà provare che la* Ln *cade dall' altra parte della* LG; *cioè che il valore della* Ln, *in questa supposizione determinato, sia positivo. E di fatto poichè la mossa e i quattro cunei si sono intesi tutti collocati da una parte dell' Arco, sarà l' Arco formato di più di nove pezzi; e per conseguenza l' angolo al centro di un cuneo, cioè* 2μ, *sarà minore di* $20°$; *e perciò* $6\mu < 60°$, *laonde* $\cos. 6\mu > \cos. 60°$ *o* $> \frac{r}{2}$, *e* $\frac{r}{2} < \cos. 6\mu$: *quindi anche* $r.\text{sen}.4\mu < 2.\text{sen}.4\mu.\cos.6\mu$. *Ma per l' equazione VI*, $2.\text{sen}.4\mu.\cos.6\mu = r.\text{sen}.10\mu - r.\text{sen}.2\mu$, *dunque* $r.\text{sen}.4\mu < r.\text{sen}.10\mu - r.\text{sen}.2\mu$; *e trasportando s' avrà* $r.\text{sen}.2\mu < r.\text{sen}.10\mu - r.\text{sen}.4\mu <$

$$\begin{aligned} & r.\text{sen}.6\mu - r.\text{sen}.4\mu \\ + & r.\text{sen}.8\mu - r.\text{sen}.6\mu \\ + & r.\text{sen}.10\mu - r.\text{sen}.8\mu \end{aligned}$$

Si ha poi per la suddetta equazione $r.\text{sen}.6\mu - r.\text{sen}.4\mu = 2.\text{sen}.\mu.\cos.5\mu$, $r.\text{sen}.8\mu - r.\text{sen}.6\mu = 2.\text{sen}.\mu.\cos.7\mu$, *e* $r.\text{sen}.10\mu - r.\text{sen}.8\mu = 2.\text{sen}.\mu.\cos.9\mu$; *dunque* $r.\text{sen}.2\mu < 2.\text{sen}.\mu\,(\cos.5\mu + \cos.7\mu + \cos.9\mu)$, *ovvero* $\frac{r.\text{sen}.2\mu}{\cos.\mu} < \frac{2.\text{sen}.\mu.\cos.\mu\,(\cos.5\mu + \cos.7\mu + \cos.9\mu)}{(\cos.\mu)^2}$, *o finalmente* $\frac{a.\text{sen}.2\mu}{\cos.\mu} < \frac{a.\text{sen}.2\mu\,(\cos.5\mu + \cos.7\mu + \cos.9\mu)}{(\cos.\mu)^2}$. *Per il che* $-\frac{a.\text{sen}.2\mu}{\cos.\mu} + \frac{a.\text{sen}.2\mu\,(\cos.5\mu + \cos.7\mu + \cos.9\mu)}{(\cos.\mu)^2}$, *ch' è il valore di* Ln *ritrovato nella Proposizione, è quantità positiva.*

TEOREMA I. PROPOSIZIONE 9.

Se dopo d' aver adattati alla centina tutti i cunei da una parte e dall' altra, si fermi col serraglio un Arco intero o scemo; non saran-

no

no premuti dal ferraglio i due cunei contigui, ma tutto il fuo pefo graverà fulla centina.

Imperciocchè fe non vi foffero adattati i cunei fulla centina, ma folo nella fommità dell' Arco fi collocaffe il ferraglio, quefto ftarebbe immobile fulla centina premendola con tutto il fuo pefo fenza bifogno di laterali foftegni, avvegnachè la direzione della forza, che lo tira al centro de' gravi, riefca perpendicolare alla centina e incontri la bafe del cuneo, dunque dovrà fuccedere lo fteffo anche fe vi fieno da una parte e dall' altra dell' Arco meffi tutti i cunei, e però il ferraglio non farà che toccare i due laterali fenza premerli; il che ecc.

S c o l i o.

Pure è certo, che in pratica non fi verifica fempre sì fatta Propofizione fpecialmente in grazia del metodo praticato dagli artefici nel porre in opera gli ultimi cunei fuperiori di qualche grand' Arco. Sogliono effi metterli prima a fecco ftrignendoli fortemente con biette di legno fpinte a colpi di maglio fra panconcelli infaponati, e poi lafciano cadere i cunei e li cacciano dentro con calcifiruzzo; ficchè gli ultimi cunei fuddetti cominciano a foftenerfi fra di loro, nè la centina può fare rifpetto ad effi l' uffizio fuo. Nulladimeno ftando alla fola teoria, e prefcindendo da quefta pratica inventata per diminuire l' abbaffamento delle centine, e per poterle disfare più facilmente, non può rivocarfi in dubbio l' enunciata Propofizione.

PROBLEMA 9. PROPOSIZIONE 10.

Se fra i pilaftri di un Arco intero fia meffa la centina, poi da una parte la moffa e quanti cunei fi vogliano, determinare l' efpreffione algebraica generale della preffione di uno qualunque di effi cunei fulla centina, o del fuo sfiancamento o preffione fulla fopraccentina.

Fig. VIII. Tav. II. Allora quando erasi supposto, che sopra la mossa vi stesse un cuneo solo, s' era trovata la pressione *GH* del cuneo sulla centina $= \frac{a \cdot \text{sen.}\ 2\mu}{\cos.\ \mu}$; e lo sfiancamento *LP* della mossa

Prop. 2 di questo $= \frac{a \cdot \text{sen.}\ 2\mu \cdot \cos.\ 3\mu}{(\cos.\ \mu)^2}$, ed è la stessa cosa che dire, essere negativa la pressione della mossa suddetta sulla centina, ed $= -\frac{a \cdot \text{sen.}\ 2\mu \cdot \cos.\ 3\mu}{(\cos.\ \mu)^2}$.

Fig. IX. Ma quando i cunei sulla mossa erano due, s' è veduto, che la pressione *FV* del primo cuneo è $= \frac{a \cdot \text{sen.}\ 4\mu}{\cos.\ \mu}$; la pres-

Prop. 4 di questo sione *GP* del secondo cuneo $= \frac{a \cdot \text{sen.}\ 2\mu}{\cos.\ \mu} - \frac{a \cdot \text{sen.}\ 2\mu \cdot \cos.\ 5\mu}{(\cos.\ \mu)^2}$; e lo sfiancamento della mossa ridotto a pressione negativa della centina $= -\frac{a \cdot \text{sen.}\ 2\mu\,(\cos.\ 3\mu + \cos.\ 5\mu)}{(\cos.\ \mu)^2}$.

Fig. X. Similmente se i cunei sulla mossa sieno tre, diventa la

Prop. 6 di questo pressione *AY* del primo cuneo superiore $= \frac{a \cdot \text{sen.}\ 6\mu}{\cos.\ \mu}$; la pressione *DX* del secondo cuneo $= \frac{a \cdot \text{sen.}\ 4\mu}{\cos.\ \mu} - \frac{a \cdot \text{sen.}\ 2\mu \cdot \cos.\ 7\mu}{(\cos.\ \mu)^2}$; la pressione del terzo cuneo (o siasi sfiancamento a pressione negativa ridotto) sarà $= \frac{a \cdot \text{sen.}\ 2\mu}{\cos.\ \mu} - \frac{a \cdot \text{sen.}\ 2\mu(\cos.\ 5\mu + \cos.\ 7\mu)}{(\cos.\ \mu)^2}$: ma lo sfiancamento della mossa ridotto a pressione negativa della centina sarà $= -\frac{a \cdot \text{sen.}\ 2\mu(\cos.\ 3\mu + \cos.\ 5\mu + \cos.\ 7\mu)}{(\cos.\ \mu)^2}$.

Fig. XI. Finalmente se i cunei sulla mossa sieno quattro, la pressione *HR* del primo cuneo è $= \frac{a \cdot \text{sen.}\ 8\mu}{\cos.\ \mu}$; la pressione *Ix* del

Prop. 8 di questo secondo cuneo $= \frac{a \cdot \text{sen.}\ 6\mu}{\cos.\ \mu} - \frac{a \cdot \text{sen.}\ 2\mu \cdot \cos.\ 9\mu}{(\cos.\ \mu)^2}$; la pressione *Kc* del terzo $= \frac{a \cdot \text{sen.}\ 4\mu}{\cos.\ \mu} - \frac{a \cdot \text{sen.}\ 2\mu\,(\cos.\ 7\mu + \cos.\ 9\mu)}{(\cos.\ \mu)^2}$; lo

sfiancamento Ln del quarto cuneo ridotto a pressione negativa $= \frac{a . \text{sen. } 2\mu}{\text{cos. } \mu} - \frac{a . \text{sen. } 2\mu(\text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu + \text{cos. } 9\mu)}{(\text{cos. } \mu)^2}$; e per ultimo la pressione negativa della mossa si ritrovò essere $= - \frac{a . \text{sen. } 2\mu(\text{cos. } 3\mu + \text{cos. } 5\mu + \text{cos. } 7\mu + \text{cos. } 9\mu)}{(\text{cos. } \mu)^2}$.

Per la qual cosa attentamente esaminando l' ordine e la legge secondo la quale progrediscono le pressioni positive e negative de' cunei ne' casi soprammentovati, dove è dato il numero de' cunei soprapposti alle mosse, sarà lecito dedurre generalmente, che, chiamato x il loro numero sulla mossa, sarà la pressione del primo cuneo $= \frac{a . \text{sen. } 2x\mu}{\text{cos. } \mu}$; quella del secondo $= \frac{a . \text{sen. } (2x - 2)\mu}{\text{cos. } \mu} - \frac{a . \text{sen. } 2\mu . \text{cos. } (2x + 1)\mu}{(\text{cos. } \mu)^2}$; similmente la pressione del terzo cuneo $= \frac{a . \text{sen. } (2x - 4)\mu}{\text{cos. } \mu} - \frac{a . \text{sen. } 2\mu(\text{cos.}(2x + 1)\mu + \text{cos.}(2x - 1)\mu)}{(\text{cos. } \mu)^2}$; la pressione poi del quarto cuneo sulla centina si ritrova $= \frac{a . \text{sen.}(2x - 6)\mu}{\text{cos. } \mu} - \frac{a . \text{sen. } 2\mu(\text{cos.}(2x+1)\mu + \text{cos.}(2x - 1)\mu + \text{cos.}(2x - 3)\mu)}{(\text{cos. } \mu)^2}$, di modo che generalmente la pressione positiva o negativa del cuneo m^{esimo} sarà uguale al binomio $\frac{a.\text{sen.}(2x - 2m + 2)\mu}{\text{cos. } \mu} - \frac{a.\text{sen. } 2\mu}{(\text{cos. } \mu)^2} . (\text{cos. } (2x + 1)\mu + \text{cos. } (2x - 1)\mu + \text{cos. } (2x - 3)\mu \text{ ecc.} \ldots)$. Si avverta però, che nella serie implicata nella seconda quantità del binomio si debbe prendere un numero di termini $= m - 1$, avvegnachè dal secondo cuneo cominci ad aver origine la quantità suddetta. Ma la somma di un numero di termini $m - 1$ della serie medesima $\text{cos. } (2x + 1)\mu$, $\text{cos. } (2x - 1)\mu$, $\text{cos. } (2x - 3)\mu$ ecc...., è uguale alla quantità $\frac{\text{sen. } (m - 1)\mu . \text{cos. } (2x - m + 3)\mu}{\text{sen. } \mu}$: laonde generalmente la pres- Prop. 8 Lib. I.

fione del cuneo m^{esimo} diventerà $= \frac{a . \text{sen.} (2x - 2m + 2)\mu}{\cos. \mu} - \frac{a.\text{sen.} 2\mu.\text{sen.}(m-1)\mu.\cos.(2x-m+3)\mu}{\text{sen.} \mu . (\cos. \mu)^2} = \frac{a.\text{sen.}(2x-2m+2)\mu}{\cos. \mu} - \frac{2a . \text{sen.} (m-1)\mu . \cos. (2x-m+3)\mu}{r . \cos. \mu}$: con queſto però, che ſe queſt' ultimo binomio, adattato a' caſi particolari, rieſca poſitivo, la preſſione è poſitiva e il cuneo realmente preme la centina; e all' incontro quando dal binomio ne riſulti una quantità negativa vorrà dire, che la preſſione di quel tal cuneo è negativa, ovvero che il cuneo sfianca, e lo sfiancamento ſarà uguale allo ſteſſo binomio co' ſegni cangiati; il che ecc.

Corollario.

Se nella formola generale eſprimente le preſſioni poſitive e negative de' cunei ſi faccia $m = x + 1$, ſi conſeguirà la preſſione negativa della moſſa $= - \frac{2a . \text{sen.} x\mu . \cos. (x + 2)\mu}{r . \cos. \mu}$; e però lo sfiancamento della moſſa medeſima diventerà $= \frac{2a . \text{sen.} x\mu . \cos. (x + 2)\mu}{r . \cos. \mu}$.

PROBLEMA 10. PROPOSIZIONE 11.

Date le ſteſſe coſe dell' antecedente propoſizione, trovare ſe uno qualſivoglia de' cunei prema la centina, o soffra sfiancamento, ovvero nè prema nè sfianchi.

Fig. XII. Tav. II. Sia armata la centina fra i pilaſtri dell' Arco intero, poi da una parte ſia collocata la moſſa *AB* e quanti cunei ſi vogliano *BC CD DE EF FG GH HM* ecc., che ſieno x di numero: fa duopo ritrovare ſe uno di eſſi cunei per eſempio *EF*, che ſia m^{esimo} in ordine, principiando dal primo ſuperiore *NI*,

prema la centina, o soffra sfiancamento, ovvero nè prema nè sfianchi.

Sia K il punto di mezzo della base del cuneo EF, r quello della mossa, e Q il centro dell'Arco: la gravità poi di un cuneo sia $= a$, il suo angolo al centro $= 2\mu$, e il raggio delle Tavole $r = QA$. Per le cose dette nell'antecedente sarà la pressione positiva o negativa del cuneo $m^{esimo} = \frac{a \,.\, \text{sen.}\,(2x - 2m + 2)\mu}{\cos.\,\mu}$ $- \frac{2a \,.\, \text{sen.}\,(m - 1)\mu \,.\, \cos.\,(2x - m + 3)\mu}{r \,.\, \cos.\,\mu}$, con questo però, che quando il binomio riesce positivo, positiva è ancora la pressione sulla centina, e viceversa s'è negativo, la pressione è negativa, e diventa sfiancamento se si cangino al binomio medesimo i segni: laonde quando mai accadesse che il primo termine del binomio fosse uguale al secondo, sarebbe questo un segno evidente, che quel cuneo m^{esimo} nè preme la centina, nè soffre sfiancamento. In questo caso dunque sarà

$$\frac{a \,.\, \text{sen.}\,(2x - 2m + 2)\mu}{\cos.\,\mu} = \frac{2a \,.\, \text{sen.}\,(m - 1)\mu \,.\, \cos.\,(2x - m + 3)\mu}{r \,.\, \cos.\,\mu};$$

cioè $r \,.\, \text{sen.}\,(2x - 2m + 2)\mu = 2 \,.\, \text{sen.}\,(m - 1)\mu \,.\, \cos.\,(2x - m + 3)\mu$; ma per l'equazione VI (non essendo mai x minore di m nè però $2x > 2m - 4$, laonde $2x - m + 3 > m - 1$) si ricava $2 \,.\, \text{sen.}\,(m - 1)\mu \,.\, \cos.\,(2x - m + 3)\mu = r \,.\, \text{sen.}\,(2x + 2)\mu - r \,.\, \text{sen.}\,(2x - 2m + 4)\mu$; dunque sarà $r \,.\, \text{sen.}\,(2x - 2m + 2)\mu = r \,.\, \text{sen.}\,(2x + 2)\mu - r \,.\, \text{sen.}\,(2x - 2m + 4)\mu$, e trasportando, $r \,.\, \text{sen.}(2x - 2m + 2)\mu + r \,.\, \text{sen.}(2x - 2m + 4)\mu = r \,.\, \text{sen.}(2x + 2)\mu$. E' poi, per l'equazione V, $r \,.\, \text{sen.}(2x - 2m + 2)\mu + r \,.\, \text{sen.}(2x - 2m + 4)\mu = 2 \,.\, \cos.\,\mu \,.\, \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu$; onde finalmente, affinchè il cuneo m^{esimo} nè prema nè sfianchi, converrà che sia $2 \,.\, \cos.\,\mu \,.\, \text{sen.}\,(2x - 2m + 3)\mu = r \,.\, \text{sen.}\,(2x + 2)\mu$, e però $\text{sen.}\,(2x - 2m + 3)\mu = \frac{r \,.\, \text{sen.}\,(2x + 2)\mu}{2 \,.\, \cos.\,\mu}$. Ora essendo x il numero de' cunei senza la mossa, se s'aggiunga la mossa, saranno in tutti $x + 1$; l'arco poi AL è $= 2\mu$, dunque tutto l'arco $AI = (x + 1)2\mu = (2x + 2)\mu$; e però condotta dal punto I la IV perpendicolare al diametro, sarà la retta $IV = \text{sen.}(2x + 2)\mu$. Di nuovo perchè il cuneo EF è m^{esimo} in ordi-

Prop. 7 Lib. I.

ne, farà l'arco $IE = 2m\mu$, e per conseguenza l'arco $Ik = 2m\mu - \mu$: l'arco poi AI s'è trovato $= (2x + 2)\mu$, laonde l'arco rimanente $Ak = (2x + 2)\mu - 2m\mu + \mu = (2x - 2m + 3)\mu$; quindi, tirate le ku rs parallele a IV, s'avrà sen. $(2x - 2m + 3)\mu = ku$, siccome cos. $\mu = Qs$. Sicchè se il cuneo EF nè debba premere nè sfiancare, dovrà riuscire la $ku = \frac{QA \cdot IV}{2 \cdot Qs}$. Laonde se si faccia come $2Qs : QA :: IV$ ad una quarta proporzionale VO, e si conduca dal punto O la OP parallela alla AQ, se essa OP incontri il punto di mezzo della base di un cuneo EF, onde sia $ku = VO = \frac{QA \cdot IV}{2 \cdot Qs}$, farà segno, che il cuneo medesimo nè preme la centina nè sfianca.

Ma se il punto di mezzo della base di un cuneo cadesse sopra la linea retta OP tirata dal punto O dove VO è $= \frac{QA \cdot IV}{2 \cdot Qs}$, come avviene del punto di mezzo Z della base del cuneo HM, ciò indicherà che il seno ZY dell'arco AZ è maggiore di VQ, cioè sen. $(2x - 2m + 3)\mu > \frac{r \cdot \text{sen.}(2x + 2)\mu}{2 \cdot \cos. \mu}$, ovvero, invertendo il calcolo superiore, $\frac{a \cdot \text{sen.}(2x - 2m + 2)\mu}{\cos. \mu} > \frac{2a \cdot \text{sen.}(m - 1)\mu \cdot \cos.(2x - m + 3)\mu}{r \cdot \cos. \mu}$, e però il binomio $\frac{a \cdot \text{sen.}(2x - 2m + 2)\mu}{\cos. \mu} - \frac{2a \cdot \text{sen.}(m - 1)\mu \cdot \cos.(2x - m + 3)\mu}{r \cdot \cos. \mu}$ riuscirà positivo; e in conseguenza la pressione del cuneo HM non meno di quelle de' cunei superiori sarebbe pressione positiva, ed i cunei premerebbero di fatto la centina.

Per fine se il punto di mezzo della base di un cuneo come DE cadesse sotto la OP, il binomio $\frac{a \cdot \text{sen.}(2x - 2m + 2)\mu}{\cos. \mu} - \frac{2a \cdot \text{sen.}(m - 1)\mu \cdot \cos.(2x - m + 3)\mu}{r \cdot \cos. \mu}$ riuscirebbe negativo; onde tanto esso cuneo che gl'inferiori sarebbero ad un reale sfiancamento soggetti; il che ecc.

COROLLARIO I.

Havvi dunque nella circonferenza AI del cerchio interiore un punto k, dove la OP lo sega, che dinota il passaggio dalla pressione allo sfiancamento; di modo che tutti i cunei aventi i punti di mezzo delle loro basi sopra quel punto premeranno la centina, e tutti gli altri di sotto sfiancheranno; e se ve ne fosse alcuno per esempio EF il di cui punto di mezzo della base cadesse nel punto medesimo k, non premerà il cuneo EF la centina nè sfiancherà; quindi il punto k sarebbe un punto d' equilibrio. Dif. 17 Lib. I.

COROLLARIO 2.

Il punto d' equilibrio, quando vi sia, dee ancora variare di mano in mano, che si vanno mettendo sulla centina da ciascuna parte dell' Arco intero nuovi cunei: ma la regola per ritrovarlo sarà per ogni numero di cunei la stessa, cioè di fare $VO = \frac{QA \cdot IV}{2 \cdot Qs}$, dipoi tirare la OP parallela alla corda sino a che incontri la circonferenza AI. Imperciocchè se nella OP s'incontrerà il punto di mezzo k della base di qualche cuneo EF, sarà k un punto d' equilibrio.

COROLLARIO 3.

Se con questo metodo si determini il punto k della centina, il quale non cada nel mezzo della base di un qualche cuneo, non vi sarà punto d' equilibrio nella centina, ma k sarà sempre un punto, che servirà *di norma* per conoscere, che tutti i cunei aventi i punti di mezzo delle loro basi ad esso superiori premono la centina, mentre gl' inferiori, che avranno i punti di mezzo sotto k, sfiancheranno, e premeranno la sopraccentina.

COROLLARIO 4.

E però se il numero de' cunei componenti la parte AI di un Arco intero sia infinito, e infinitamente picciolo ognuno di essi come AB, è manifesto che l' archetto AL, come anche la sua metà Ar sarà un infinitamente piccolo; e perciò il suo coseno Qs non differirà dal raggio QA; per conseguenza s' avrà $VO = \frac{QA \cdot IV}{2 \cdot Qs} = \frac{IV}{2}$, cioè VO sarà uguale alla metà di IV. Divisa dunque per mezzo la IV in O e condotta la OP parallela alla AQ, vi sarà, nella supposizione che i cunei sieno infinitamente piccioli, in k il punto d'equilibrio.

COROLLARIO 5.

Fig. XIII. Tav. II. E se sulla centina fossero collocati i cunei dell' Arco fino al serraglio; in questo caso diventando il numero di tutti i pezzi componenti l' Arco $= 2x + 3$, sarà la semicirconferenza $= (2x + 3)2\mu$, e il quadrante $= (2x + 3)\mu$: onde gli archi $(2x + 2)\mu$ e μ sono insieme uniti uguali al quadrante, quindi sen. $(2x + 2)\mu =$ cos. μ. Sia pertanto FC il serraglio dell' Arco e dal punto T si tiri la TN parallela a CQ; e però fatta $ND = \frac{r \cdot \text{sen.}\,(2x + 2)\mu}{2 \cdot \cos.\,\mu} = \frac{r}{2} = \frac{QA}{2}$, e condotta la DP parallela a QA che interfechi la centina nel punto E, sarà E il punto di norma, che diventerà anche punto d' equilibrio, se corrisponda al punto di mezzo della base di un cuneo come nella Figura. E poichè il seno EV dell' arco AE è uguale alla metà del raggio QA, l' arco AE sarà di $30°$, e di $60°$ il suo complemento EZ: per la qual cosa venendo il peso del serraglio sostenuto dalla centina nè esercitando esso alcuna pressione su' due cunei laterali, sarà vera l' asserzione, che posti tutti i cunei di un Arco intero sulla centina, di qualunque numero ne sia egli formato, que' superiori, ch' avranno la linea che unisce il punto di mezzo della loro base col centro dell' Arco meno inclinata di 60 gradi alla saetta, premeranno la centina; i due cunei, che da una parte e dall' altra avranno essa linea inclinata alla saetta

Prop. 9 di questo

per

per 60 gradi (quando pure ve ne ſiano) non premeranno la centina nè sfiancheranno; ma gl' inferiori, ne' quali la ſopraddetta linea ſia più inclinata di gradi 60 alla ſaetta, sfiancheranno, ed avranno biſogno di eſſere ſoſtenuti dalla ſopraccentina, o da altro rattenimento.

SCOLIO I.

Sia per eſempio l' Arco intero compoſto di 81 pezzi, cioè di 2 moſſe, 1 ſerraglio, e 39 cunei per parte. Sarà pertanto in ciaſcuna parte da' ventiſei cunei ſuperiori, inſieme colla metà del ſerraglio, occupato un angolo di $58°.\ 53'\frac{1}{3}$; *e a queſto aggiungendo* $1°.\ 6'\frac{2}{3}$, *ch' è la metà dell' angolo al centro di un de' cunei, ſi conſeguiranno in ſomma preciſamente* $60°$; *laonde i cunei ventiſetteſimi (cominciando il novero in ciaſcuna parte da' cunei laterali al ſerraglio) hanno le linee, che uniſcono i punti di mezzo delle loro baſi col centro dell' Arco, inclinate alla ſaetta per gradi 60; e però eſſi cunei nè premono nè sfiancano. All' incontro i ventiſei ſuperiori da ciaſcuna parte, in tutti cinquantatre col ſerraglio, premono la centina; mentre i tredici inferiori pure da ciaſcuna parte dell' Arco, compreſe le moſſe, ſoffrono uno sfiancamento; e ſono in tutti ottant' uno.*

SCOLIO 2.

Sia per ſecondo eſempio formato l' Arco intero di 95 cunei, cioè 2 moſſe, 1 ſerraglio, e 46 cunei per parte: ſi domanda quanti cunei ſuperiori premano la centina, e dove naſcano gli sfiancamenti. Sarà dunque l' angolo al centro di un cuneo $= 1°.\ 53'\frac{13}{19}$; *e però da ciaſcuna parte i 30 cunei ſuperiori, inſieme colla metà del ſerraglio, occuperanno un angolo di* $57°.\ 47'\frac{7}{19}$; *e a queſto aggiugnendo* $56'\frac{16}{19}$, *ch' è la metà dell' angolo al centro di un cu-*

neo, s' avrà in somma 58°. 44' $\frac{4}{19}$, *e di tal grandezza sarà l' angolo che fa colla saetta quella linea, che dal punto di mezzo della base del trentunesimo si conduce al centro dell' Arco; e per conseguenza ne' cunei trentaduesimi quest' angolo sarà di* 60°. 37' $\frac{17}{19}$; *il primo minore, maggiore il secondo di gradi* 60. *Nessun cuneo dunque ha in questo caso la linea, che unisce il suo centro di gravità col centro dell' Arco, inclinata alla saetta per gradi* 60; *laonde non v' ha alcun punto d' equilibrio, e i primi sfiancamenti succedono ne' cunei trentaduesimi; quindi li* 63 *cunei superiori, compreso il serraglio, premeranno la centina, e li* 16 *inferiori da ciascuna parte saranno a sfiancamento soggetti.*

COROLLARIO 6.

Fig. XIII. Tav. II. E se il numero de' pezzi, che formano l' Arco intero totalmente riempiuto, fosse infinito, è manifesto che il punto d'equilibrio cadrà da ciascuna parte come in *E*, dove l'angolo *EQZ* sia di 60°, e il quadrante *AZ* sesquialtero dell' arco *ZE*; e però anche il numero de' cunei collocati sul quadrante *AZ* sarà sesquialtero di quelli che sono collocati nell' arco *ZE*; laonde essendo per le prese denominazioni il numero de' cunei collocati sull' intero semicerchio *AZG* uguale a $2x + 3$, o dicasi $2x$ (poichè in questo caso x è infinito), saranno quelli del quadrante *AZ* di numero x, e gli altri dell' arco *ZE* uguali a $\frac{2x}{3}$: e di questa nozione ci varremo a luogo opportuno.

PROBLEMA II. PROPOSIZIONE 12.

Se fra i pilastri di un Arco scemo sia gittata la centina, poi da una parte si pongano la mossa e quanti cunei si vogliano, determinare l'espressione generale delle pressioni e degli sfiancamenti de' cunei.

Fra i pilastri di un Arco scemo sia gittata la centina ABC, e da una parte si pongano la mossa AM e quanti cunei si vogliano, il superiore de' quali sia GE. Facciasi poi al solito la gravità di ciascun cuneo $= a$, il suo angolo al centro $= 2\mu$; indi condotta l'orizzontale DK sia l'angolo $EDK = n\mu$, indicando n qualunque numero intero o rotto e anche irrazionale: ricercasi l'espressione generale della pressione o dello sfiancamento del cuneo RF, ch' è m^{esimo} in ordine. Fig. I. Tav. III.

Facendo sulla Figura una costruzione simile a quelle che si son fatte per gli Archi interi, poscia calcolando si troverà, che la pressione del primo cuneo superiore GE diventerà $= \frac{a.\,\text{sen.}\,(n-2)\mu}{\cos.\,\mu}$; quella del secondo $= \frac{a.\,\text{sen.}\,(n-4)\mu}{\cos.\,\mu} - \frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu.\,\cos.(n-1)\mu}{(\cos.\,\mu)^2}$; la pressione del terzo $= \frac{a.\,\text{sen.}(n-6)\mu}{\cos.\,\mu} - \frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu\,(\cos.\,(n-1)\mu + \cos.\,(n-3)\mu)}{(\cos.\,\mu)^2}$; e in simil guisa la susseguente del quarto cuneo si renderà $= \frac{a.\,\text{sen.}\,(n-8)\mu}{\cos.\,\mu} - \frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu\,(\cos.\,(n-1)\mu + \cos.\,(n-3)\mu + \cos.\,(n-5)\mu)}{(\cos.\,\mu)^2}$; e così in progresso: per conseguenza la pressione del cuneo m^{esimo} in ordine si farà uguale a questo binomio $\frac{a.\,\text{sen.}\,(n-2m)\mu}{\cos.\,\mu} - \frac{a.\,\text{sen.}\,2\mu.\,(\cos.\,(n-1)\mu + \cos.\,(n-3)\mu + \cos.\,(n-5)\mu\ \text{ecc.}\ldots)}{(\cos.\,\mu)^2}$.

Si avverta in prima, che nella serie inviluppata nel secondo termine del binomio debbesi prendere un numero di termini $= m - 1$, poichè nel secondo cuneo solamente ha origine la serie e il secondo termine medesimo; e si avverta in secondo luogo, che se il binomio è positivo, la pressione è realmente pressione sulla centina, ma se fosse negativo, essa diventa pressione negativa, o sfiancamento.

Resta ora da simplificare il secondo termine di esso binomio, o da sommare un numero di termini $m - 1$ della serie $\cos.\,(n-1)\mu$, $\cos.\,(n-3)\mu$, $\cos.\,(n-5)\mu$ ecc.: ma que-

Prop. 8 Lib. I. sta somma è $= \frac{\text{sen.}(m-1)\mu \,.\, \cos.(n-m+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu}$; dunque riducendo sarà la pressione del cuneo $m^{esimo} = \frac{a\,.\,\text{sen.}(n-2m)\mu}{\cos.\,\mu}$ $- \frac{2a\,.\,\text{sen.}(m-1)\mu \,.\, \cos.(n-m+1)\mu}{r\,.\,\cos.\,\mu}$; il che ecc.

COROLLARIO I.

Se l'Arco scemo si accrescesse di sotto fino a diventare intero, e si chiamasse x il numero de' cunei posti da una parte sulla centina, non compresa la mossa, sicchè colla mossa fossero $x+1$; allora K sarebbe il punto dell' impostatura, e l' angolo EDK diventerebbe $= (x+1)2\mu$; laonde $(x+1)2\mu = n\mu$, e $n = 2(x+1)$; quindi sostituendo $2(x+1)$ in luogo di n nel binomio di sopra ritrovato, si avrà per la pressione del cuneo m^{esimo} in un Arco intero, sulla centina del quale sieno stati collocati da una parte un numero $x+1$ di cunei, la quantità $\frac{a.\text{sen.}(2x-2m+2)}{\cos.\,\mu} - \frac{2a.\text{sen.}(m-1)\mu.\cos.(2x-m+3)\mu}{r.\cos.\,\mu}$, dove x m sono numeri interi; e questa formola conviene con

Prop. 10 di questo quella, che s' è in altro luogo trovata.

COROLLARIO 2.

Egli è per se stesso evidente, che se il binomio fosse uguale a zero, quel tal cuneo m^{esimo} nè premerebbe la centina nè sfiancherebbe, e però egli corrisponderebbe ad un punto d' equilibrio nella centina medesima. Ma fatto il binomio $= 0$, diventa $\frac{a\,.\,\text{sen.}(n-2m)\mu}{\cos.\,\mu} = \frac{2a\,.\,\text{sen.}(m-1)\mu\,.\,\cos.(n-m+1)\mu}{r\,.\,\cos.\,\mu}$, la qual equazione sviluppata dà $2.\cos.\,\mu\,.\,\text{sen.}(n-2m+1)\mu = r.\text{sen.}\,n\mu$, dunque $\text{sen.}(n-2m+1)\mu = \frac{r\,.\,\text{sen.}\,n\mu}{2\,.\cos.\,\mu}$. Oltre a ciò prendendo la ED per raggio, la ES è $= \text{sen.}\,EDK = \text{sen.}\,n\mu$; e se si dividano per mezzo gli archetti AL RI in N H, l'angolo EDH sarà $= 2m\mu - \mu$, ma $EDK = n\mu$, laonde il rimanente HDK

$= (n - 2m + 1)\mu$; e però sen. $(n - 2m + 1)\mu = HZ$; la DP poi sarà $= \cos.\mu$: per conseguenza $HZ = \frac{ED \,.\, ES}{2 \,.\, DP}$, le quali ED ES DP sono quantità cognite. Quindi se fatta $DO = \frac{ED \,.\, ES}{2 \,.\, DP}$, e condotta la OH parallela alla DK, il punto H cada nel mezzo della base di un cuneo, sarà H un punto d' equilibrio nella centina; altrimenti non sarà che un punto di norma: ma nell' uno e nell' altro caso sarà vero che tutti i cunei che hanno i punti di mezzo delle loro basi sopra H premeranno la centina, e viceversa sfiancheranno quelli che gli hanno di sotto.

Corollario 3.

E però se fosse riempiuto di cunei tutto l' Arco scemo fino al rigoglio B, sarà $HZ = DO = \frac{ED \,.\, QV}{2 \,.\, DP}$, ma $QV = DP$, perchè amendue sono coseni degli angoli uguali BDQ ADN, dunque $DO = \frac{ED}{2} = \frac{BD}{2}$; laonde l' angolo HDB sarà di 60 gradi. Quindi negli Archi scemi totalmente riempiuti succede lo stesso che negli Archi interi, cioè che tutti i cunei ne' quali la linea, che unisce il centro dell' Arco col punto di mezzo della loro base, sia meno inclinata di 60° alla saetta, premono la centina; quelli che l' avessero inclinata di 60° nè premono nè sfiancano, e corrisponderebbero ad un punto d' equilibrio; e gli altri all' incontro che l' abbiano inclinata oltre li 60° sfiancheranno: per conseguenza i punti di norma o d' equilibrio sono ugualmente dal rigoglio lontani tanto negli Archi interi totalmente riempiuti che negli scemi, purchè siano uguali i raggi; e ne segue ancora che possono assegnarsi Archi scemi, ne' quali tutti i cunei, niuno eccettuato, premano la centina.

Corol. 5 Prop. 11 di questo

COROLLARIO 4.

E se i cunei fossero infiniti di numero, allora DP si rende $= DA = DE$, dunque nell' Arco scemo non interamente
Corol. 2 riempiuto sarà $HZ = DO = \frac{ES}{2}$; per conseguenza nel riempiuto sarà $DO = \frac{DE}{2}$, cioè DO uguale alla metà del raggio: lo stesso si dica de' cunei che sono collocati dall' altra parte.

SCOLIO.

Dopo di aver trattato degli Archi interi e degli scemi vorrebbe l' ordine, che si parlasse de' composti; ma il modo con cui siamo proceduti negli Archi interi ci libera da questa necessità. In fatti nelle antecedenti Proposizioni non abbiamo supposto l' Arco intero totalmente costruito, ma solo una di lui parte composta di un certo numero di cunei, e nelle formole generali, quindi ricavate, delle pressioni e de' punti d' equilibrio o di norma bisognava sostituire il numero de' cunei soprapposti alla mossa per conseguire il determinato e particolar valore di quelle: e però essendo l' Arco composto formato da due Archi scemi che hanno il loro centro nella corda dell' Arco, o diremmo piuttosto, di due porzioni d' Archi interi aventi il loro centro nella corda, le quali porzioni in un punto s' intersecano, succederanno negli Archi composti, quando si costruiscono e dopo interamente compiuti, le stesse cose da ciascuna parte, come se si fabbricasse sulla centina un Arco intero senza condurlo al suo termine d' integrità. Il serraglio del composto non può pure, teoricamente parlando, produrre alcuna variazione, venendo esso tutto dalla centina sostenuto.

PROBLEMA 12. PROPOSIZIONE 13.

Se sopra la centina di un Arco scemo sieno da una parte adattati quanti cunei si vogliano, si domanda la somma delle pressioni di

un numero m de' superiori, i quali premano tutti la centina stessa.

Si faccia come nell' antecedente la gravità di un cuneo $= a$, il suo angolo al centro $= 2\mu$, e l'angolo $EDK = n\mu$: si domanda la somma delle pressioni positive de' cunei dal superiore GE fino al cuneo RF inclusivamente, ch'è m^{esimo} in ordine. Fig. I. Tav. III.

Si è veduto, che $\frac{a.\text{sen}.(n-2m)\mu}{\cos.\mu} - \frac{2a.\text{sen}.(m-1)\mu.\cos.(n-m+1)\mu}{r.\cos.\mu}$ Prop. ant.

$= \frac{a}{r.\cos.\mu}\left(r.\text{sen}.(n-2m)\mu - 2.\text{sen}.(m-1)\mu.\cos.(n-m+1)\mu\right)$

è una formola generale ch' esprime la pressione del cuneo m^{esimo}: trattasi dunque di trovare una somma di termini m di cui la sopraddetta formola sia il termine generale.

Ora essendo, per l'equazione VI, $2.\text{sen}.(m-1)\mu.\cos.(n-m+1)\mu = r.\text{sen}.n\mu - r.\text{sen}.(n-2m+2)\mu$; il termine generale si ridurrà in questo $\frac{a}{r.\cos.\mu}\left(r.\text{sen}.(n-2m)\mu + r.\text{sen}.(n-2m+2)\mu - r.\text{sen}.n\mu\right) =$ (per l'equazione V) $\frac{a}{r.\cos.\mu}.$ $\left(2.\text{sen}.(n-2m+1)\mu.\cos.\mu - r.\text{sen}.n\mu\right) = \frac{2a.\text{sen}.(n-2m+1)\mu}{r} - \frac{a.\text{sen}.n\mu}{\cos.\mu}$, dove tutto è costante fuori di m. Pertanto se dalla somma generale della serie, nella quale il termine generale sia $\frac{2a.\text{sen}.(n-2m+1)\mu}{r}$, si sottragga la quantità $\frac{a.\text{sen}.n\mu}{\cos.\mu}$ ripetuta un numero m di volte, si conseguirà certamente la somma generale ricercata. Ma se si faccia in esso termine generale prima $m=1$ poi $m=2$, si avranno i due primi termini della serie, indi la sua somma generale che sarà uguale a $\frac{2a.\text{sen}.(n-m)\mu.\text{sen}.m\mu}{r.\text{sen}.\mu}$; dunque finalmente la somma delle Prop. 7 Lib. I. Prop. 8 Lib. I.

pressioni di un numero m di cunei sarà $= \frac{2a.\text{sen.}(n-m)\mu.\text{sen.}m\mu}{r.\text{sen.}\mu} - \frac{am.\text{sen.}n\mu}{\cos.\mu} =$ (per l' equazione VIII) $\frac{a.\cos.(n-2m)\mu}{\text{sen.}\mu} - \frac{a.\cos.n\mu}{\text{sen.}\mu} - \frac{am.\text{sen.}n\mu}{\cos.\mu}$; il che ecc.

Corollario 1.

Per conseguenza se s' accrescesse di tanto l' Arco scemo *ER* fino a ridurlo intero, per modo che la sua impostatura fosse in *K*, e si chiamasse x il numero de' cunei sulla mossa, in questo caso s' avrebbe $n = 2(x+1)$; e però la somma delle pressioni di un numero m di cunei in una parte dell' Arco intero sarà uguale $\frac{a.\cos.(2x-2m+2)\mu}{\text{sen.}\mu} - \frac{a.\cos.(2x+2)\mu}{\text{sen.}\mu} - \frac{am.\text{sen.}(2x+2)\mu}{\cos.\mu}$. E quest' equazione può servire anche per gli Archi composti, i quali non sono che parti dell' Arco intero non totalmente riempiuto.

Cor. 1 Prop. ant.

Scolio Prop. ant.

Corollario 2.

E se gli Archi scemi fossero interamente riempiuti, allora l' angolo *QDK* cioè $n\mu$ diventerà complemento dell' angolo *QDB* ovvero dell' angolo *ADN*; e però sen. $n\mu = \cos.\mu$, e $\cos.n\mu = \text{sen.}\mu$, dunque la somma delle pressioni de' cunei sarà $= \frac{a.\cos.(n-2m)\mu}{\text{sen.}\mu} - a - am = \frac{a.\cos.(n-2m)\mu}{\text{sen.}\mu} - a(m+1)$. Se l' Arco poi fosse intero diventerà la sopraddetta somma $= \frac{a.\cos.(2x-2m+2)\mu}{\text{sen.}\mu} - a(m+1)$.

PROBLEMA

PROBLEMA 13. PROPOSIZIONE 14.

Se ſopra la centina di un Arco intero ſieno poſti tutti i cunei, quanti eſſi ſiano; ritrovare la ſomma delle preſſioni di tutti i cunei che gravano ſulla centina.

S' è dimoſtrato, che chiamato il peſo di un cuneo $= a$, il ſuo angolo al centro $= 2\mu$, x il numero de' cunei meſſi da una parte e dall' altra dell' Arco intero, non compreſe le moſſe e il ſerraglio, s' è dimoſtrato, dico, che la ſomma delle preſſioni di un numero m di eſſi ſulla centina è $=$ Corol. 2 dell' antec.
$\frac{a \cdot \text{cos.}(2x - 2m + 2)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - a(m + 1)$.

Quindi ſuppoſto che m ſia preciſamente il numero totale de' cunei, che da ciaſcuna parte del ſerraglio premono la centina, ſarà la ſomma delle loro preſſioni inſieme con quella del ſerraglio uguale a $\frac{2a \cdot \text{cos.}(2x - 2m + 2)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - 2a(m + 1)$
$+ a = \frac{2a \cdot \text{cos.}(2x - 2m + 2)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - a(2m + 1)$.

Ora ſieno tre ſolamente i pezzi componenti l' Arco intero, coſicchè $x = 0$, $m = 0$, e l' angolo al centro di un cuneo o ſia $2\mu = 60°$: ſarà, ſoſtituendo, la preſſione ſulla centina $= \frac{2a \cdot \text{cos.}\,60°}{\text{sen.}\,30°} - a$; ma $\text{cos.}\,60° = \text{sen.}\,30°$; laonde detta preſſione ſarà uguale a $2a - a = a$: e così ſi doveva ritrovare. Imperciocchè nel caſo in cui ſieno ſolo tre i pezzi coſtituenti l' Arco, il ſerraglio preme con tutto il ſuo peſo la centina, niente la premono le moſſe, che gravitano con tutto il loro peſo ſui pilaſtri, ponendoſi che le linee verticali tirate dal loro centro di gravità cadano dentro le baſi.

Siano in ſecondo luogo 9 di numero i pezzi che compongono l' Arco a tutto ſeſto, nel qual caſo s' è dimoſtrato, Corol. che i cinque ſuperiori, compreſo il ſerraglio, premono la Prop. 6 centina, niente gli altri: onde ſarà $m = 2$, $x = 3$, e 2μ di queſto

$= 20°$; e però la somma delle pressioni sulla centina $=$ $\frac{2a.\cos. 40°}{\text{sen. } 10°} - 5a = \frac{2a.7660444}{1736482} - 5a = a.\frac{6638478}{1736482} = a.\frac{3823}{1000}$.

Ma si prenda per terzo esempio il caso in cui 81 sieno i suddetti pezzi: sarà $x = 39$, $m = 26$, $2\mu = 2°.\ 13'\frac{1}{3}$; onde, sostituendo, sarà la somma delle pressioni sulla centina $= \frac{2a.\cos. 31°.6'\frac{2}{3}}{\text{sen. } 1°.6'\frac{2}{3}} - 53a = \frac{2a.8561669}{193913} - 53a = a.\frac{6845949}{193913}$ $= a.\frac{35304}{1000}$.

Scol. 1 Prop. 11 di questo

Per fine sieno 95 i pezzi componenti l' Arco intero, e $x = 46$, $m = 31$, $2\mu = 1°.53'\frac{13}{19}$; e però mediante la sostituzione delle quantità medesime s' avrà la somma delle pressioni contro la centina $= \frac{2a.\cos. 30°.18'\frac{15}{19}}{\text{sen. } 56'\frac{16}{19}} - 63a = \frac{2a.8632565}{165340}$ $- 63a = a.\frac{6848710}{165340} = a.\frac{41422}{1000}$. E collo stesso metodo si determinerà la somma delle pressioni sulla centina in un Arco intero formato di qualsivoglia numero di cunei; il che ecc.

Scol. 2 della cit. Prop.

Corollario I.

Similmente se m indichi il numero totale de' cunei che da ciascuna parte del serraglio premono la centina di un Arco scemo interamente riempiuto, poichè la somma delle pressioni di quelli che sono da una parte è $= \frac{a.\cos.(n - 2m)\mu}{\text{sen. } \mu}$ $- a(m + 1)$, ne segue che la somma delle pressioni di tutti, compreso il serraglio, debba essere $= \frac{2a.\cos.(n - 2m)\mu}{\text{sen. } \mu} -$ $a(2m + 1)$.

Cor. 2 Prop. ant.

Ma supponendo che m in un Arco composto indichi il numero de' cunei che da ciascuna parte premono la centina, poichè si è dimostrata la somma delle pressioni di

quelli da una parte $= \frac{a.\cos.(2x - 2m + 2)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{a.\cos.(2x + 2)\mu}{\text{sen.}\,\mu}$ Cor. 1 Prop. cit.
$- \frac{am.\text{sen.}(2x + 2)\mu}{\cos.\,\mu}$, sarà la somma totale delle pressioni dell' Arco composto sulla centina (fatto il peso del serraglio $= Q$) $=$
$\frac{2a.\cos(2x-2m+2)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{2a.\cos.(2x+2)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{2am.\text{sen.}(2x+2)\mu}{\cos.\,\mu} + Q.$

S c o l i o 1.

Veramente il metodo suppone che sia cognito nell' Arco intero, e nello scemo, o composto, il numero totale m *di cunei laterali al serraglio, che da ciascuna parte premono la centina; ma siccome si è altrove mostrato il modo di determinarlo, così non vi può essere difficoltà nell' adattar la regola a' casi particolari.*

C o r o l l a r i o 2.

E poichè s' è trovato, che quando i cunei componenti l' Arco intero siano tre, la pressione esercitata sulla centina diventa $= a$, mentre il peso de' tre coni componenti tutto l' Arco è $= 3a$; dunque in questo caso starà il peso di tutto l' Arco intero alla pressione sulla centina come $3a : a$, o prossimamente come $1000 : 333$.

Ma nel caso che fossero 9 i pezzi dell' Arco la somma delle pressioni sulla centina è risultata $= a.\frac{3823}{1000}$, laddove il peso di tutto l' Arco è $= 9a$; laonde sta il peso di tutto l' Arco alla somma delle pressioni sulla centina come $9a : a.\frac{3823}{1000}$, o prossimamente come $1000 : 425$.

E quando i pezzi componenti l' Arco fossero 81 di numero, starà il peso totale dell' Arco alle pressioni sulla centina come $81a : a.\frac{35304}{1000}$, o come $1000 : 435\frac{4}{5}$. E finalmente essendo 95, il peso dell' Arco alle pressioni sulla centina starà come $95a$:

$a . \frac{41422}{1000}$, o come $1000 : 436\frac{2}{95}$; e così degli altri. Anzi generalmente quando il numero de' pezzi componenti l' Arco intero sia $= 2x + 3$, avrà il peso di tutto l' Arco alla somma delle pressioni sulla centina la stessa ragione di $a(2x+3) : \frac{2a . \cos.(2x - 2m + 2)\mu}{\text{sen.}\, \mu} - a(2m + 1)$, o come $2x + 3 : \frac{2 . \cos.(2x - 2m + 2)\mu}{\text{sen.}\, \mu} - 2m - 1$, se pure m esprima il numero de' cunei che da ciascuna parte premono la centina.

Corollario 3.

Corol. 6 Prop. 11 di questo — E però se il numero de' cunei componenti l' Arco sia infinito, onde $x = \infty$, diventando in questo caso $m = \frac{2x}{3}$, e sen. $\mu = \mu$, starà il peso totale dell' Arco alla somma delle pressioni sulla centina in ragione di $2x : \frac{2}{\mu} . \cos. \frac{2x\mu}{3} - \frac{4x}{3}$ ovvero come $2x\mu : 2.\cos. \frac{2x\mu}{3} - \frac{4x\mu}{3}$. Ma in questa supposizione

Fig. XIII. Tav. II. — essendo il semicerchio $AZG = 2x . 2\mu$, sarà il quadrante $AZ = 2x\mu$, l' arco $ZE = \frac{4x\mu}{3}$, e l' arco $AE = \frac{2x\mu}{3}$, dunque cos. $\frac{2x\mu}{3} = EI$; laonde il peso dell' Arco alle pressioni sulla centina come $AZ : 2 . EI - ZE$. Per il che fatto il raggio $= 1000$, essendo il quadrante AZ prossimamente $= 1571$, l' arco $ZE = 1047$, e il coseno $EI = 866$; starà finalmente il peso alle pressioni in proporzione di $1571 : 685$, ovvero come $1000 : 436$, che ridotta a numeri bassi s' avvicina di molto a quella di $9 : 4$; per conseguenza supposto l' Arco intero formato di un numero infinito di cunei, la centina sostiene quattro noni circa del peso totale di tutto l' Arco.

SCOLIO 2.

Anche Couplet negli Atti dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1729 *con un' ingegnosa maniera dimostrò l' ultima verità accennata nel fine del Corollario antecedente; ch' è quella sola Proposizione, che intorno alla pressione de' cunei sulle centine mi venne fatto di vedere nell' Opere degli Autori, che hanno scritto sugli Archi e sulle Volte. Io ho però mostrato il modo di trovare la somma delle pressioni sulla centina, di qualunque numero finito di cunei sia formato l' Arco a tutto sesto, ch' è certamente una quistione molto più difficile dell' altra, la quale suppone infinito il numero stesso de' cunei. Di più l' ho estesa agli Archi scemi, e composti, e nel Lib. IV la risolverò anche per gli Archi di qualunque curvatura dotati, benchè in questo caso, per adattarmi alle forze del calcolo, sia stato in necessità d' intendere l' Arco diviso in un infinito numero di cunei, come* Couplet *nell' Arco intero circolare.*

SCOLIO 3.

Farò ancora riflettere avanti di dar termine a questo Libro, che variando il numero de' cunei componenti un Arco intero, cangia eziandio la proporzione tra il peso dell' Arco e la pressione sulla centina, come s' è veduto negli esempli del Corollario 2 di questa, dove quando i cunei erano 3 la pressione diventava $\frac{333}{1000}$ *del peso di tutto l' Arco, se 9 s' accresceva a* $\frac{425}{1000}$, *se 81 a* $\frac{435\frac{4}{5}}{1000}$, *e a* $\frac{436\frac{2}{11}}{1000}$ *se l' Arco era di 95 cunei formato: e ciò contro quello che hanno creduto alcuni Autori, i quali applicavano la regola dei* $\frac{4}{9}$ *del* Couplet, *ch' è solo vera nell' ipotesi de' cunei infinitesimi, anche agli Archi interi formati di un numero finito di cunei. Appena per approssimazione si può valersene quando il numero de' cunei passa il cinquanta circa. Hanno poi questi stessi Autori errato molto più, quando l' hanno applicata agli Archi scemi. Imperocchè quando ancora fosse sempre vero, che nell' Arco a tutto se-*

sto la centina sostenesse quattro noni di tutto il suo peso, nell' Arco scemo sosterrebbe essa quattro noni non del suo proprio peso, ma dell' Arco intero di cui quello fosse scemo.

S C O L I O 4.

Da un valente scarpellino ho fatto tagliare undici cunei di marmo formanti un Arco intero, nelle loro commessure oltremodo politi, affine di verificare coll' esperienza alcune verità dimostrate in questo Libro. L' Arco aveva 2 piedi di diametro, 3 pollici di grossezza e altrettanta larghezza, il tutto in misura di Francia. Aveva fatta ancora costruire una centina semicircolare di legname di larice tutta solida e grossa quanto l' Arco, acciocchè i cunei vi poggiassero sopra comodamente: ma per poter sostenere le basi inferiori delle mosse, v' erano in vece di pilastri alla centina attaccate da ciascuna parte due alette del legname medesimo, i di cui piani superiori stavano nel piano orizzontale condotto per il diametro. Per diminuire poi gli attriti aveva fatto incastrare nella centina quasi per tutta la sua grossezza e ne' luoghi corrispondenti al mezzo delle basi de' cunei, alcuni cilindretti di metallo girevoli d' intorno ai loro assi e sormontanti insensibilmente la superficie esteriore della centina stessa; due poi ve n' erano da ciascuna parte con ugual direzione ne' piani dell' alette sulle quali dovevano gravare le mosse: e nell' atto di sperimentare ungeva d' olio tutte le commessure de' cunei.

Se da una parte si adattava alla centina la mossa e un solo cuneo, cominciavasi già a riconoscere qualche sfiancamento nella mossa. Ma mettendone due sulla mossa, allora sì che essa non poteva più star ferma a suo luogo senza una mano che applicata esternamente ne impedisse lo sfiancamento. Se poi sulla mossa collocavansi tre cunei, molto maggiore diventava il di lei sfiancamento; e ancora più quand' erano quattro, e in questo caso si manifestava pure altro sfiancamento nel cuneo alla mossa contiguo; le quali cose tutte s' accordano colle nostre dimostrazioni. Ma a che servono queste sperienze in modello? Si esamini in grande la natura, e legganſi per esempio l' accurate osservazioni del Ch. Sig. Perronet negli Atti dell' Accademia delle Scienze per l' anno 1752 *fatte su tre Ponti costrutti in Francia sotto i suoi occhi medesimi, e si rileverà come di mano in mano che fabbricavasi sulle centine da ciascuna parte,*

nascevano in certo luogo dell' Arco alcune separazioni o aperture in prima poco distanti dal piombo interiore delle impostature, & ensuite successivement plus haut à mesure, que l' on élève la voûte; *vale a dire v' era un passaggio dalla pressione allo sfiancamento, il qual passaggio cangiava di posizione quanto più si sollevava l' Arco. L' Autore lo attribuisce all' abbassamento che soffrono le centine in forza della pressione de' cunei: ciò sarà vero in parte, ma la principal cagione dell' effetto debbesi certamente attribuire a quegli sfiancamenti che abbiamo dimostrato succedere ne' cunei inferiori degli Archi. Se la centina fosse inflessibile, per esempio un macigno, pure si vedrebbero quelle separazioni osservate dal dotto Autore ne' tre Ponti accennati.*

Fine del Libro Secondo.



LIBRO TERZO

DEGLI ARCHI CIRCOLARI FORMATI DI UN NUMERO QUALSIVOGLIA DI CUNEI, DOPO DISARMATE LE CENTINE.

PROBLEMA I. PROPOSIZIONE I.

Se un Arco intero ſia di tre ſoli pezzi formato, cioè di due moſſe e del ſerraglio; ritrovare le ſpinte relative e gli ſfiancamenti delle moſſe, dopo che dall' Arco è ſtata tolta la centina.

Fig. III. Tav. III. Sia l'Arco a tutto ſeſto *QSKXHN* formato delle moſſe *QH IK* e del ſerraglio *HL*, e dopo la ſua coſtruzione ſi ſupponga eſſergli ſtata tolta di ſotto la centinatura: domandanſi le ſpinte relative, e gli ſfiancamenti delle moſſe.

Si prendano i centri di gravità *B A C* de' cunei *QH HL LX*, e ſi uniſcano le *BA AC*, che saranno perpendicolari alle *MH IL*; poi ſi giungano i raggi della Figura e ſi tiri la verticale *BP*; indi nella retta *AD* ſi prenda una linea qualunque *AE* che eſprima la gravità del ſerraglio *HL*, e ſi compia il parallelogrammo *AFEG*: finalmente fatta la *BR* uguale alla *AF* e per diritto alla *AB*, ſi compia l' altro parallelogrammo *BORP*.

Pertanto poichè il ſerraglio *HL* s' appoggia alle moſſe per mezzo delle ſuperficie loro ſuperiori *MH LI*, ſe la *AE* eſpri- Prop. 20 Lib. I. ma la gravità del ſerraglio, la *AF* o *BR* eſprimerà la ſua ſpinta relativa ſul cuneo inferiore *QH*: ma la *BR* è inclinata all' orizzonte, laonde la forza *BR* ſi divide nelle due *BO BP*, di cui la prima *BO* eſprimerà lo ſfiancamento della moſſa o la ſua preſſione ſulla ſopraccentina, e l' altra *BP* ſi unirà

rà col di lei peſo per premere il pilaſtro, ſicchè la loro ſomma dinoterà la ſpinta relativa della moſſa medeſima. Lo ſteſſo ſi troverà dall' altra parte dell' Arco; il che ecc.

S c o l i o.

Se eſternamente non vi foſſe la ſopraccentina adattata all' Arco intero, o altro ritegno, come abbiamo domandato, le moſſe ubbedendo alla forza sfiancante ſarebbero traſcinate al di fuori, e tutto l' Arco andrebbe ſoſſopra. Siccome dunque è neceſſario di ſupporre adattate le ſopraccentine nel primo ſtato degli Archi, cioè quando ſi coſtruiſcono; così le ſi debbono anche ſupporre nel ſecondo loro ſtato, ovvero dopo tolte le centinature: anzi in queſto ve n' ha, per così dire, maggior uopo che nel primo; poichè quando ſi mettono i cunei ſulle centine, ne reſta almeno una parte ſuperiore dalle centine ſoſtenuta, laddove dopo di eſſere ſtate diſarmate, ogni cuneo, dal ſerraglio in fuori, sfianca ed ha biſogno di eſſere ſoſtenuto affinchè tutto l' Arco non rovini. Ma ciò apparirà ancora più chiaro nelle ſuſſeguenti Propoſizioni. Dom. IV. Lib. I.

PROBLEMA 2. PROPOSIZIONE 2.

Date le ſteſſe coſe come nell' antecedente, ritrovare l'eſpreſſioni analitiche delle ſpinte relative e degli sfiancamenti delle moſſe.

Si faccia la gravità di ogni cuneo QH HL $LX = a$, onde abbiaſi $AE = a$, il raggio delle tavole ſi dica $= r$, e l' angolo $HDN = 2\mu$. Fig. III. Tav. III.

Sarà pertanto AE ad AF, come il ſeno dell' angolo FAG al ſeno dell' angolo EAG; ma il ſeno dell' angolo FAG è uguale al ſeno del ſuo ſupplimento HDI, e il ſeno dell' angolo EAG è uguale al coſeno dell' angolo ADI o al ſeno dell' angolo IDN; dunque ſoſtituendo le lettere ſarà $a : AF :: \text{sen.}2\mu : \text{sen.}4\mu$; e perciò la ſpinta relativa AF del ſerraglio $= \frac{a\,.\,\text{sen.}\,4\mu}{\text{sen.}\,2\mu} = \frac{2a\,.\,\text{sen.}\,2\mu\,.\,\text{cos.}\,2\mu}{r\,.\,\text{sen.}\,2\mu} = \frac{2a}{r}\,.\,\text{cos.}\,2\mu = BR$. E queſto valore di BR può ancora, volendo, renderſi più ſemplice, per-

chè essendo l' angolo HDN o 2μ di $60°$, sarà cos. 2μ uguale alla metà del raggio cioè $= \frac{r}{2}$; e però $BR = \frac{2a}{r} . \cos. 2\mu = \frac{2a}{r} . \frac{r}{2} = a$: pure mi piace tener la prima forma composta $\frac{2a}{r} . \cos. 2\mu$, perchè si vegga più facilmente, paragonando questo caso dell' Arco intero formato di tre soli cunei colle risoluzioni de' Problemi susseguenti, ove di mano in mano accresco il numero de' cunei componenti l' Arco, l' ordine col quale procedono le spinte relative. In oltre l' angolo PBD è uguale all' angolo FBD; ma l' angolo PBD è uguale all' interiore ROB e l' angolo FBD è uguale all' opposto al vertice RBO, dunque l' angolo ROB sarà uguale all' angolo RBO, e perciò la retta RB è uguale alla RO o alla BP; laonde anche $BP = \frac{2a}{r} . \cos. 2\mu$; e per conseguenza la spinta relativa della mossa sul pilastro $= BV + a = a + \frac{2a}{r} . \cos. 2\mu$. Di nuovo come BR a BO, così sta il seno dell' angolo OBP al seno dell' angolo RBP; ma il seno dell' angolo OBP è uguale al seno del suo supplimento PBD, ed il seno di RBP è uguale al seno di PBF o di NDH; dunque starà $BR : BO ::$ sen. PBD : sen. RBP, cioè $\frac{2a}{r} . \cos. 2\mu : BO :: \cos. \mu : \text{sen.}\, 2\mu :: r . \cos. \mu : 2 . \text{sen.}\, \mu . \cos. \mu :: r : 2 . \text{sen.}\, \mu$; quindi lo sfiancamento BO della mossa $= \frac{4a . \text{sen.}\, \mu}{r^2} . \cos. 2\mu$, la qual quantità può anche facilmente mostrarsi uguale ad a cioè alla gravità di un cuneo; il che ecc.

S c o l i o.

De la Hire *e* Belidor *fondano i loro calcoli sugli Archi, di qualunque curvatura essi sieno, nella supposizione, che l' Arco sia in tre parti diviso, e che le parti inferiori sieno attaccate fermamente a' pilastri, e con esse costituenti un pezzo solo. Per tal modo*

si liberano dalla necessità di considerare gli sfiancamenti de' cunei e delle mosse, e possono procedere nelle risoluzioni con metodo facile e spedito: ma la loro supposizione non regge al fatto, nè spiega la vera natura degli Archi, e l' intime loro proprietà, come noi tentiamo di fare.

PROBLEMA 3. PROPOSIZIONE 3.

Se un Arco intero sia formato di cinque pezzi, cioè di due mosse, del serraglio, e di un cuneo per parte collocato fra le mosse e il serraglio; trovare le spinte relative de' cunei e gli sfiancamenti dopo disarmate le centine.

Sia l' Arco a tutto sesto *AEbVFB* composto dalle mosse *AD Vb*, dal serraglio *EH*, e da' cunei *DE Hb*: si ricercano le spinte relative e gli sfiancamenti de' cunei dopo il disarmamento delle centine. Fig. IV. Tav. III.

Si prendano i centri di gravità *L K I c* de' cunei *AD DE EH Hb*, e si uniscano le *LK KI Ic*, le quali saranno perpendicolari a' raggi *CZ EZ GZ*, e si tirino ancora gli altri raggi *IZ KZ LZ*; poi da' punti *I K L* si conducano le verticali *IM XN Ld* uguali fra di loro, che rappresentino le gravità rispettive del serraglio *EH*, del conio *DE*, e della mossa *AD*; e si compiano i parallelogrammi *IOMP KSNR*.

E poichè il serraglio *EH* sta appoggiato alle superficie superiori de' cunei *DE Hb*, se la *IM* rappresenti la gravità del serraglio, rappresenterà *IO* la pressione del serraglio sul cuneo *DE*. Per la stessa ragione essendo espressa dalla retta *XN* la gravità del cuneo *DE*, esprimerà *KR* la sua pressione sul serraglio superiore *EH*, e *XS* la sua pressione sulla mossa inferiore *AB*: il peso poi della mossa medesima non si divide ma tutto gravita sul pilastro. Di nuovo perchè come la *IO* alla *IM*, ovvero alla *XN*, così è il seno dell' angolo *MIO* al seno dell' angolo *OIP*; ma l' angolo *MIO* è complemento dell' angolo *IZF*, e perciò uguale all' angolo *FZB*; laonde come la *IO* alla *XN*, così è il seno dell' angolo *FZB* al seno dell' angolo *OIP* cioè al seno dell' angolo *SKR*. In si-

mil guisa si proverà che come la *KN* alla *KR*, così è il seno dell' angolo *SKR* al seno dell' angolo *SKN*, ovvero *DZB*; onde per ugualità ordinata sarà come la *IO* alla *KR*, così il seno dell' angolo *FZB* al seno dell' angolo *DZB*; il seno poi dell' angolo *FZB* è maggiore del seno dell' angolo *DZB*; dunque sarà anche la *IO* maggiore della *KR*. Prolunghisi la *IK* in *T* e facciasi il prolungamento *KT* uguale all' eccesso onde la *IO* supera la *KR*.

Ora essendo dal serraglio premuto il cuneo *DE* per la direzione *IK* con una forza uguale a *IO*, ed essendo viceversa dal cuneo premuto il serraglio con una forza *KR* minore di *IO* e per la direzione *KI* direttamente contraria alla direzione *IK*, impiegherà il serraglio una parte della forza *IO* uguale a *KR* per contrabbilanciare la forza medesima *KR*, e la rimanente *KT* dinoterà la spinra relativa del serraglio. La *KT* poi è inclinata alla superficie superiore *CD* della mossa, laonde, compiuto il parallelogrammo *KQTa*, esprimerà *KQ* lo sfiancamento del cuneo *DE* e *Ka* la pressione, che per conto della forza *KT* egli esercita sulla mossa; ma s'è dimostrato superiormente esservi un' altra forza *KS* che preme la mossa; e però prolungata la *KL* e fatta *Lf* uguale a *KS* e *fg* uguale a *Ka*, dinoterà *Lg* l' intera spinta relativa del cuneo *DE*; la quale essendo di nuovo inclinata all' impostatura *AB* bisognerà compiere il parallelogrammo *Lbgi* per avere lo sfiancamento *Lb* della mossa, e nella somma delle *Li Ld* la spinta relativa, ch' essa esercita sul pilastro. E lo stesso si troverà operando dall' altra parte della figura; il che ecc.

Corollario.

E poichè *TK* è uguale alla differenza delle *IO KR*, sarà *TR* uguale a *IO*. Si prolunghino le *QT NS* finchè concorrano in *k* e si prolunghi *KT* finchè concorra in *e* colla *ke* parallela a *KN*; indi si unisca la *Kk* e si termini il parallelogrammo *KQkp*. Sarà dunque la *TR* uguale a *kN*; ma la *TR* è uguale alla *IO* come la *kN* alla *eK*, laonde anche *eK* è uguale a *IO*: ed essendo il triangolo *KQT* simile ed uguale al triangolo *Skp*, sarà la linea *Sp* uguale a *Ka*, e però la retta *Kp* è uguale alla somma delle *KS Ka*. In luogo dunque di trovare

lo sfiancamento e la spinta relativa del cuneo *DE* come nel Problema s' è detto, potevasi procedere con altra costruzione, cioè prendere la *Ke* per diritto a *IK* e uguale a *IO* poi compiere prima il parallelogrammo *KekN* indi l' altro *KQkp*, poichè allora *KQ* dinoterebbe lo sfiancamento di esso cuneo *DE* e *Kp* la sua spinta relativa. Di nuovo portando dal punto *L* nella *KL* prolungata la linea *Lg* uguale a *Kp*, e compiendo i parallelogrammi *Lgmd Lbmn*, si troverebbe similmente lo sfiancamento *Lb* della mossa e la di lei spinta relativa *Ln*, che sarà uguale alla somma delle *Li Ld*.

S c o l i o.

Tuttavolta s' è voluto seguire in questa Proposizione, come si farà nelle susseguenti, la prima costruzione piuttosto che la seconda del Corollario, sì perchè essa è più all' operar della natura conforme, come per far conoscere le reciproche pressioni de' cunei nelle loro commessure.

PROBLEMA 4. PROPOSIZIONE 4.

Date le cose medesime dell' antecedente, ritrovare l' espressioni analitiche delle spinte relative e degli sfiancamenti.

Si ritengano le solite denominazioni cioè $IM = KN = Ld = a$, l' angolo DZB al centro di un cuneo $= 2\mu$, r il raggio delle Tavole; e si dimostrerà come nella Prop. 2 di questo la KT uguale a Ka, e la Lg uguale alla Li. E perchè come $IM : IO :: \text{sen.}\, FZH : \text{sen.}\, MIO$, e il seno dell' angolo MIO è uguale al seno dell' angolo FZB ovvero dell' angolo HZB, dunque $IM : IO :: \text{sen.}\, FZH : \text{sen.}\, HZB$; e sostituendo $a : IO :: \text{sen.}\, 2\mu : \text{sen.}\, 6\mu$; e però $IO = \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 6\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$. Di nuovo sta come $KN : KR :: \text{sen.}\, SKR : \text{sen.}\, DZB$, e il seno dell' angolo SKR è uguale al seno del suo supplimento FZD, laonde sarà $a : KR :: \text{sen.}\, 2\mu : \text{sen.}\, 2\mu$, quindi $KR = a$: dipoi l' altra analogia KN:

$KS :: \text{sen.}\, SKR : \text{sen.}\, NKR$ ($=$ sen. FZB) ci darà $a : KS :: \text{sen.}\, 2\mu :$ sen. 4μ, e per conseguenza $KS = \frac{a.\text{sen.}\, 4\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} = \frac{2a.\text{sen.}\, 2\mu.\cos.2\mu}{r.\text{sen.}\, 2\mu} = \frac{2a}{r}.\cos.2\mu$. Ora essendo $IO = \frac{a.\text{sen.}\, 6\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$ e $KR = a$, sarà $KT = IO - KR = \frac{a.\text{sen.}\, 6\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} - a$; è poi per l' equazione VI

Prop. 7 Lib. I. sen. $6\mu -$ sen. $2\mu = \frac{2.\text{sen.}\, 2\mu.\cos.4\mu}{r}$, e però $\frac{\text{sen.}\, 6\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} - 1 = \frac{2}{r}.\cos.4\mu$, dunque $KT = \frac{2a}{r}.\cos.4\mu$; e così sarà determinata la spinta relativa del serraglio. In oltre essendo come KT a KQ, così il seno dell' angolo QKa al seno dell' angolo TKa, ovvero il seno dell' angolo aKZ al seno dell' angolo SKR, sarà, sostituendo, $\frac{2a}{r}.\cos.4\mu : KQ :: \cos.\mu : \text{sen.}\, 2\mu :: r : 2.\text{sen.}\,\mu$, e però lo sfiancamento KQ del cuneo $DE = \frac{4a.\text{sen.}\mu}{r^2}.\cos.4\mu$: indi si troverà la spinta relativa Lg di esso cuneo facendo $Lg = Lf + fg = KS + Ka = KS + KT = \frac{2a}{r}.\cos.2\mu + \frac{2a}{r}.\cos.4\mu = \frac{2a}{r}.(\cos.2\mu + \cos.4\mu)$. Finalmente si risolva il triangolo Lgb per avere $Lg : Lb :: \text{sen.}\, iLZ : \text{sen.}\, iLK$, o $\frac{2a}{r}.(\cos.2\mu + \cos.4\mu) : Lb :: \cos.\mu : \text{sen.}\, 2\mu :: r : 2.\text{sen.}\,\mu$, dalla quale analogia si ricava lo sfiancamento Lb della mossa $= \frac{4a.\text{sen.}\,\mu}{r^2}.(\cos.2\mu + \cos.4\mu)$; mentre essendo $Lg = Li$, e $Ld = a$, si ha già nella somma delle Li Ld la sua spinta relativa sul pilastro $= \frac{2a}{r}.(\cos.2\mu + \cos.4\mu) + a$; il che ecc.

PROBLEMA 5. PROPOSIZIONE 5.

Se un Arco a tutto ſeſto ſia di ſette pezzi formato, cioè delle moſſe, del ferraglio, e di due cunei per parte tra le moſſe e il ſerraglio; determinare le ſpinte relative de' cunei ed i loro sfiancamenti dopo tolta la centina.

Sia l' Arco a tutto ſeſto *ACEFDB* compoſto di due moſſe, di cui una è la *AB*, del ſerraglio *DE*, e di due cunei per parte, come da una parte ſono li *BC CD*: ſi domandano le ſpinte relative e gli sfiancamenti dopo diſarmate le centine. Fig. V. Tav. III

Si prendano i centri di gravità *L K I H G* e ſi congiungano le *LK KI IH HG* e i raggi della Figura: ſaranno eſſe *LK KI IH HG* perpendicolari alle commeſſure de' cunei. Si conducano poſcia dai punti *L K I H* le verticali *Lb KP IN HM* uguali fra loro, che rappreſentino le gravità de' riſpettivi cunei, e ſi compiano i parallelogrammi *KXPV ITNS HQMR*.

Pertanto eſprimerà *HQ* la preſſione del ſerraglio ſul cuneo *CD*, e viceverſa *IS* eſprimerà la preſſione di queſto contro il ſerraglio: ſimilmente *IT* dinoterà la preſſione del cuneo ſuperiore *CD* contro l' inferiore *BC*, e viceverſa *XV* la preſſione dell' inferiore contro il ſuperiore. Nella *KX* poi ſi ha la preſſione del cuneo *BC* contro la moſſa; ed eſſa graviterà con tutto il ſuo peſo ſul pilaſtro nè niente opererà contro il ſuo cuneo ſuperiore.

Ora eſſendo come la *HQ* alla *HM* ovvero alla *IN*, così il ſeno dell' angolo *QHM* al ſeno dell'angolo *QHR*, ovvero come il ſeno dell' angolo *DOA* al ſeno dell'angolo *TIS*; e parimenti eſſendo come *IN* a *IS* così il ſeno dell' angolo *TIS* al ſeno dell' angolo *COA*; ſarà per ugualità ordinata come la *HQ* alla *IS*, così il ſeno dell' angolo *DOA* al ſeno dell' angolo *COA*; ma il ſeno dell' angolo *DOA* è maggiore del ſeno dell' angolo *COA*, dunque ancora la *HQ* ſarà maggiore della *IS*. Nello ſteſſo modo ſi proverà, che come la *IT* alla *KV* così è il ſeno dell' angolo *DOA* al ſeno dell' angolo *BOA*;

e la retta *IY* maggiore della *KV*. Si prenda la *IW* per diritto alla *HI* e uguale all' eccesso onde la *HQ* supera la *IS*, e la *KY* per diritto alla *IK* uguale all' eccesso onde la *IY* supera la *KV*.

E perchè il serraglio preme il cuneo inferiore *CD* con una forza uguale a *HQ*, e all' incontro questo preme il serraglio con una forza *IS* minore di *HQ* e direttamente contraria, una parte della forza *HQ* sarà impiegata a resistere alla pressione del cuneo sottostante, e colla rimanente seguiterà a premerlo per la direzione *HI* : ma la *IW* è per diritto alla *HI* ed è uguale alla differenza delle forze *HQ IS*; e però la *IW* dinoterà la forza e la direzione colla quale dal serraglio resta premuto il cuneo *CD* e per conseguenza la spinta relativa del serraglio. Per la stessa ragione *KY* esprimerà la differenza delle forze *IY KV*, o la forza che resta per questo conto al cuneo *CD* contro l' inferiore *BC*. In oltre essendo la direzione *IW* obbliqua alla commessura fra i cunei *BC CD*, a cui la *IK* è perpendicolare, se si compia il parallelogrammo *IZWÆ*, rappresenterà *IZ* lo sfiancamento del cuneo *CD*, e *IÆ* altra forza, che impiega il cuneo superiore *CD* contro l' inferiore *BC* : ma evvi ancora la forza *KY*; dunque fatta la *Ya* uguale alla *IÆ*, *Ka* dinoterà l' intera spinta relativa del cuneo *CD*. Di nuovo perchè la direzione *Ka* è obbliqua alla commessura fra la mossa *AB* e il cuneo *BC*, compiuto il parallelogrammo *Kcab*, s' avrà prima lo sfiancamento *Kc* del cuneo *BC*, poi altra forza *Kb* diretta contro la mossa, oltre la *KX*, che s' è in prima ritrovata: sicchè prolungata la *KL* in *e*, e fatta *Ld* uguale a *KX* e *de* uguale a *Kb*, in tutta la *Le* si conseguirà la spinta relativa del cuneo *BC*. Finalmente, compiuto il parallelogrammo *Lfeg*, sarà *Lf* lo sfiancamento della mossa, e la somma delle *Lg Lb* la di lei spinta relativa sul pilastro. Lo stesso si troverà per l' altra parte dell' Arco intero; il che ecc.

PROBLEMA 6. PROPOSIZIONE 6.

Ritrovare nell' Arco dell' antecedente l' espressioni algebraiche delle spinte relative e degli sfiancamenti.

Si

Si facciano al solito le gravità de' cunei o le HM IN KP Lb uguali ciascuna ad a, l' angolo al centro di un cuneo $= 2\mu$, e r il raggio delle Tavole; e proverassi come nelle Prop. 2 e 4 di questo la $I Æ$ uguale alla IW, la Xb uguale alla Ka, e la Lg uguale alla Le. Fig. V. Tav. III.

E perchè come $HM : HQ :: \text{sen.}\ QHR : \text{sen.}\ DOA\ (= \text{sen.}\ uOA)$, sarà sostituendo $a : HQ :: \text{sen.}\ 2\mu : \text{sen.}\ 8\mu$, e $HQ = \frac{a\,.\,\text{sen.}\ 8\mu}{\text{sen.}\ 2\mu}$: parimenti essendo $IN : IS :: \text{sen.}\ TIS : \text{sen.}\ COA$, ovvero $a : IS :: \text{sen.}\ 2\mu : \text{sen.}\ 4\mu$, s' avrà $IS = \frac{a\,.\,\text{sen.}\ 4\mu}{\text{sen.}\ 2\mu}$; e nello stesso modo si troverà la $IT = \frac{a\,.\,\text{sen.}\ 6\mu}{\text{sen.}\ 2\mu}$, la $KV = \frac{a\,.\,\text{sen.}\ 2\mu}{\text{sen.}\ 2\mu} = a$, e la $KX = Ld = \frac{a\,.\,\text{sen.}\ 4\mu}{\text{sen.}\ 2\mu}$: quindi la $IW = HQ - IS = \frac{a\,.\,\text{sen.}\ 8\mu}{\text{sen.}\ 2\mu} - \frac{a\,.\,\text{sen.}\ 4\mu}{\text{sen.}\ 2\mu}$, e la $KY = IT - KV = \frac{a\,.\,\text{sen.}\ 6\mu}{\text{sen.}\ 2\mu} - a$. Di nuovo essendo per l'equazione VI $\text{sen.}\ 8\mu - \text{sen.}\ 4\mu = \frac{2}{r}\,.\,\text{sen.}\ 2\mu\,.$ Prop. 7 Lib. I. $\cos.\ 6\mu$, e $\text{sen.}\ 6\mu - \text{sen.}\ 2\mu = \frac{2}{r}\,.\,\text{sen.}\ 2\mu\,.\,\cos.\ 4\mu$, siccome per l' equazione I $\text{sen.}\ 4\mu = \frac{2}{r}\,.\,\text{sen.}\ 2\mu\,.\,\cos.\ 2\mu$, sarà $IW = \frac{a.\text{sen.}8\mu}{\text{sen.}\ 2\mu} - \frac{a\,.\,\text{sen.}\ 4\mu}{\text{sen.}\ 2\mu} = \frac{2a}{r}\,.\cos.\ 6\mu$, $KY = \frac{a\,.\,\text{sen.}\ 6\mu}{\text{sen.}\ 2\mu} - a = \frac{2a}{r}\,.\cos.\ 4\mu$, e la $KX = Ld = \frac{2a}{r}\,.\cos.\ 2\mu$.

Per la qual cosa essendosi trovata la spinta relativa IW del serraglio $= \frac{2a}{r}\,.\cos.\ 6\mu$, la proporzione di $IW : IZ :: \text{sen.}\ ZIÆ :$ $\text{sen.}\ WIÆ$, o di $\frac{2a}{r}\,.\cos.\ 6\mu : IZ :: \cos.\ \mu : \text{sen.}\ 2\mu :: r : 2\,.\text{sen.}\ \mu$, somministrerà lo sfiancamento IZ del cuneo $CD = \frac{4a.\text{sen.}\ \mu}{r^2}$.

cos. 6μ: ma la ſpinta relativa Ka di eſſo cuneo, ch'è $= KY + Ya = KY + I\text{Æ} = KY + IW$, ſarà $= \frac{2a}{r} . \cos. 4\mu + \frac{2a}{r} . \cos. 6\mu = \frac{2a}{r} . (\cos. 4\mu + \cos. 6\mu)$. Similmente l' analogia $Ka : Kc ::$ sen. cKb : sen. aKb :: cos. μ : sen. 2μ :: $r : 2$. sen. μ darà lo sfiancamento Kc del cuneo $BC = \frac{4a . \text{sen.} \mu}{r^2} . (\cos. 4\mu + \cos. 6\mu)$, la di cui ſpinta relativa $Le = Ld + de = Ld + Kb = Ld + Ka$ diventerà $= \frac{2a}{r} . \cos. 2\mu + \frac{2a}{r} (\cos. 4\mu + \cos. 6\mu) = \frac{2a}{r} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu + \cos. 6\mu)$; e allo ſteſſo modo colla riſoluzione del triangolo Lfe ſi troverà lo sfiancamento Lf della moſſa $= \frac{4a . \text{sen.} \mu}{r^2} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu + \cos. 6\mu)$, e la ſua ſpinta relativa ſul pilaſtro $= Lg + Lb = \frac{2a}{r} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu + \cos. 6\mu) + a$; il che ecc.

PROBLEMA 7. PROPOSIZIONE 7.

Se un Arco intero ſia di nove pezzi compoſto, cioè delle moſſe, del ſerraglio, e di tre cunei per parte tra le moſſe e il ſerraglio; ſi domandano le ſpinte relative de' cunei ed i loro sfiancamenti dopo tolta la centinatura.

Fig. VI. Tav. III. Sia l' Arco intero *RKGEAÆ* ecc. compoſto del ſerraglio *A*, di due moſſe una delle quali è la *R*, e di tre cunei per parte come da una parte ſono gli *E G K*: ſi domandano le ſpinte relative de' cunei ed i loro sfiancamenti.

Si prendano i centri di gravità *R K G E A Æ* de' cunei, e ſi tirino le rette *RK KG GE EA AÆ* ed i raggi, poi ſi conducano le verticali *Rm KQ GH EF AB* uguali fra di loro, le quali rappreſentino le gravità de' riſpettivi loro cunei, e

si compiano i parallelogrammi *KSQW GIHP EMFO ACBD*. Si proverà similmente come nelle Proposizioni 3 e 5 antecedenti, che la *AC* è maggiore della *EO*, la *EM* maggiore della *GP*, e la *GI* maggiore della *KW*. Portinsi pertanto in direzione della *AE* la *EΓ* uguale alla differenza delle *AC EO*, in direzione della *EG* la *Gb* uguale alla differenza delle *EM GP*, e per fine in direzione della *GK* la *Kd* uguale alla differenza delle *GI KW*.

Si proverà come nelle citate Proposizioni, che la forza della gravità del ferraglio si divide nelle due *AC AD*, delle quali la forza *AC* è diretta contro il cuneo inferiore *E*; che la gravità di esso cuneo *E* si divide nella forza *EO* contro il ferraglio e nella *EM* diretta contro il secondo cuneo *G*; che la gravità del secondo *G* si divide nelle due *GP GI*, la prima rivolta all' insù contro il cuneo *E*, all' ingiù l' altra contro il cuneo *K*; che similmente la gravità del terzo cuneo *K* si divide nelle due *KW KS*; e per ultimo che il peso *Rm* della mossa preme tutto sul pilastro nè niente opera contro il cuneo superiore *K*: sicchè delle forze *AC EO*, *EM GP*, *GI KW*, tolte quelle quantità che fra di loro vicendevolmente si distruggono, resteranno le forze *EΓ Gb Kd* (oltre la forza *KS* che non vien da alcuna forza contraria diminuita) le quali per le direzioni *EΓ Gb Kd KS* agiranno contro i cunei e la mossa. E però *EΓ* esprime la spinta relativa del ferraglio, e compiuto il parallelogrammo *ELΓp*, dinoterà *EL* lo sfiancamento del primo cuneo *E*, ed *Ep* la forza che si unisce con *Gb* a premere il secondo cuneo: per conseguenza se si faccia la *bΥ* uguale alla *Ep* s' avrà in tutta la *GΥ* la spinta relativa del cuneo medesimo *E*. Di nuovo compiuto il parallelogrammo *GXΥZ*, il lato *GX* rappresenterà lo sfiancamento del secondo cuneo *G*, e *GZ* la forza che si unisce con *Kd* a premere il terzo cuneo *K*; dunque, presa la *db* uguale alla *GZ*, tutta la *Kb* esprimerà la spinta relativa del cuneo *G*. Similmente, se si compia il parallelogrammo *Kcba*, si troverà lo sfiancamento *Kc* del terzo cuneo *K*, e prolungata la *Rf* per diritto alla *KR* sicchè sia la *Re* uguale alla *KS* e la *ef* uguale alla *Ka*, sarà data nella *Rf* la spinta relativa di esso cuneo *K*. Finalmente, compiuto il parallelogrammo *Rgfq* s' avrà in *Rg* lo sfiancamento della mossa e nella somma delle *Rq Rm*

la ſua ſpinta relativa ſul pilaſtro. Lo ſteſſo ſuccede dall' altra parte dell' Arco intero; il che ecc.

PROBLEMA 8. PROPOSIZIONE 8.

Date le ſteſſe coſe come nell' antecedente, ritrovare i valori analitici delle ſpinte relative e degli sfiancamenti.

Fig. VI. Tav. III. Siano al ſolito le gravità *AB EF GH KQ Rm* de' cunei uguali ciaſcuna ad a, r il raggio delle Tavole, e 2μ l' angolo al centro di un cuneo: ſarà come nelle Prop. 2, 4, e 6 la *Ep* uguale alla *ET*, la *GZ* alla *GY*, la *Ka* alla *Kb*, e la *Rq* alla *Rf*.

Si riſolva il triangolo *ACB*, e ſi troverà la $AC = \frac{a.\,\text{sen.}\,10\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$; poi ſi riſolva il triangolo *EFO* per conſeguire la linea $EO = \frac{a.\,\text{sen.}\,6\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$ e la *FO* o la $EM = \frac{a.\,\text{sen.}\,8\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$: ſimilmente la riſoluzione del triangolo *GHP* darà la $GP = \frac{a.\,\text{sen.}\,4\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$ e la $GI = \frac{a.\,\text{sen.}\,6\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$; ſiccome colla riſoluzione del triangolo *KQW* ſi avrà $KW = a$ e $KS = \frac{a.\,\text{sen.}\,4\mu}{\text{sen.}\,2\mu} = \frac{2a.\,\text{sen.}\,2\mu.\,\text{cos.}\,2\mu}{r.\,\text{sen.}\,2\mu} = \frac{2a}{r}.\,\text{cos.}\,2\mu$. Quindi $ET = AC - EO = \frac{a.\,\text{sen.}\,10\mu}{\text{sen.}\,2\mu} - \frac{a.\text{sen.}\,6\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$, la $Gb = EM - GP = \frac{a.\,\text{sen.}\,8\mu}{\text{sen.}\,2\mu} - \frac{a.\,\text{sen.}\,4\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$, e la $Kd = GI - KW = \frac{a.\,\text{sen.}\,6\mu}{\text{sen.}\,2\mu} - a$: ma $\text{sen.}\,10\mu - \text{sen.}\,6\mu = \frac{2}{r}.\,\text{sen.}\,2\mu.$

Equaz. VI Prop. 7 Lib. I $\text{cos.}\,8\mu$, $\text{sen.}\,8\mu - \text{sen.}\,4\mu = \frac{2}{r}.\,\text{sen.}\,2\mu.\,\text{cos.}\,6\mu$, e $\text{sen.}\,6\mu - \text{sen.}\,2\mu = \frac{2}{r}.\,\text{sen.}\,2\mu.\,\text{cos.}\,4\mu$; dunque la ſpinta relativa *ET*

del serraglio $= \frac{2a}{r} . \cos. 8\mu = Ep$, la $Gb = \frac{2a}{r} . \cos. 6\mu$, e la $Kd = \frac{2a}{r} . \cos. 4\mu$.

E perchè la $E\Upsilon = \frac{2a}{r} . \cos. 8\mu$, e come la $E\Upsilon : EL :: \text{sen.}\ LEp : \text{sen.}\ \Upsilon Ep :: \cos. \mu : \text{sen.}\ 2\mu :: r : 2 . \text{sen.}\ \mu$, sarà lo sfiancamento EL del primo cuneo $E = \frac{4a . \text{sen.}\ \mu}{r^2} . \cos. 8\mu$. Di nuovo essendo la spinta relativa di esso cuneo $E = G\Upsilon = Gb + b\Upsilon = Gb + Ep$, sarà sostituendo $G\Upsilon = \frac{2a}{r} . \cos. 6\mu + \frac{2a}{r} . \cos. 8\mu = \frac{2a}{r} . (\cos. 6\mu + \cos. 8\mu)$: e però colla risoluzione del triangolo $GX\Upsilon$ si troverà lo sfiancamento GX del secondo cuneo $G = \frac{4a . \text{sen.}\ \mu}{r^2} . (\cos. 6\mu + \cos. 8\mu)$, ma la spinta relativa del cuneo medesimo sarà $= Kb = Kd + db = Kd + GZ = Kd + G\Upsilon = \frac{2a}{r} . \cos. 4\mu + \frac{2a}{r} . (\cos. 6\mu + \cos. 8\mu) = \frac{2a}{r} . (\cos. 4\mu + \cos. 6\mu + \cos. 8\mu)$. Si passi ora a risolvere il triangolo Kcb per avere lo sfiancamento Kc del terzo cuneo $K = \frac{4a . \text{sen.}\ \mu}{r^2} . (\cos. 4\mu + \cos. 6\mu + \cos. 8\mu)$, la di cui spinta relativa $Rf = Re + ef = KS + Ka = KS + Kb$, diventerà $= \frac{2a}{r} . \cos. 2\mu + \frac{2a}{r} . (\cos. 4\mu + \cos. 6\mu + \cos. 8\mu) = \frac{2a}{r} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu + \cos. 6\mu + \cos. 8\mu)$. Finalmente si risolva il triangolo Rgf, e si conseguirà lo sfiancamento Rg della mossa $= \frac{4a . \text{sen.}\ \mu}{r^2} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu + \cos. 6\mu + \cos. 8\mu)$, siccome la sua spinta relativa sul pilastro $= Rq + Rm = Rf + Rm = \frac{2a}{r} . (\cos. 2\mu + \cos. 4\mu + \cos. 6\mu + \cos. 8\mu) + a$; dunque ecc.

PROBLEMA 9. PROPOSIZIONE 9.

Qualunque sia il numero de' cunei componenti un Arco intero, trovare la spinta relativa del cuneo m^{esimo} dopo tolta la centina.

Si supponga un Arco intero composto di due mosse, di un serraglio, e di un numero x di cunei da ciascuna parte tra le mosse e il serraglio collocati, sicchè il numero di tutti i pezzi componenti l' Arco sia $= 2x + 3$: ricercasi in esso Arco la spinta relativa del cuneo m^{esimo} in ordine preso da una o dall' altra parte incominciando l' enumerazione dal cuneo laterale al serraglio.

Fig. III. Tav. III. Quando i pezzi componenti l' Arco intero erano tre, cioè due mosse e il serraglio, s' è trovata la spinta relativa AF Prop. 2 di questo o BR del serraglio $= \frac{2a}{r} . \cos. 2\mu$, e la spinta relativa della mossa $= a + \frac{2a}{r} . \cos. 2\mu$.

Fig. IV. Tav. III. Se poi i pezzi fossero cinque, vale a dire il serraglio, le mosse, e un cuneo per parte tra le mosse e il serraglio, di- Prop. 4 di questo venta la spinta relativa KT del serraglio $= \frac{2a}{r} .\cos. 4\mu$, così la spinta relativa Lg del cuneo inferiore $= \frac{2a}{r} . (\cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$, e la spinta relativa della mossa $= a + \frac{2a}{r} .(\cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$.

Fig. V. Tav. III. Supposti poi sette i pezzi dell' Arco, cioè il serraglio, le mosse, e due cunei per parte tra le mosse e il serraglio, la Prop. 6 di questo spinta relativa IW del serraglio era $= \frac{2a}{r} . \cos. 6\mu$, quella del primo cuneo o la $Ka = \frac{2a}{r} .(\cos. 6\mu + \cos. 4\mu)$, quella del

secondo cioè $Le = \frac{2a}{r} . (\cos. 6\mu + \cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$, e la spinta relativa della mossa $= a + \frac{2a}{r} . (\cos. 6\mu + \cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$.

Per fine quando l' Arco sia composto di nove pezzi, ovvero due mosse, il serraglio, e tre cunei per parte, s'è trovata la spinta relativa ET del serraglio $= \frac{2a}{r} . \cos. 8\mu$, quella del primo cuneo o la $GT = \frac{2a}{r} (\cos. 8\mu + \cos. 6\mu)$, la Kb del secondo $= \frac{2a}{r} . (\cos. 8\mu + \cos. 6\mu + \cos. 4\mu)$, la Rf del terzo $= \frac{2a}{r} . (\cos. 8\mu + \cos. 6\mu + \cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$, e la spinta relativa della mossa $= a + \frac{2a}{r} . (\cos. 8\mu + \cos. 6\mu + \cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$.

Fig. VI. Tav. III

Prop. 8 di questo

Quindi chiamato x il numero de' cunei posti da ciascheduna delle due parti tra la mossa e il serraglio, sarà la spinta relativa del serraglio $= \frac{2a}{r} . \cos. (2x + 2)\mu$, la spinta del primo cuneo $= \frac{2a}{r} . \left(\cos. (2x + 2)\mu + \cos. 2x\mu\right)$, quella del secondo $= \frac{2a}{r} . \left(\cos. (2x + 2)\mu + \cos. 2x\mu + \cos. (2x - 2)\mu\right)$, quella del terzo cuneo $= \frac{2a}{r} . \left(\cos. (2x + 2)\mu + \cos. 2x\mu + \cos. (2x - 2)\mu + \cos. (2x - 4)\mu\right)$, e così in progresso; laonde la spinta relativa del cuneo m^{esimo} sarà $= \frac{2a}{r} . \left(\cos. (2x + 2)\mu + \cos. 2x\mu + \cos. (2x - 2)\mu \text{ ecc...}\right)$. Ed è chiaro che nella serie contenuta in quest' espressione si debbono prendere tanti termini quanto è il numero $m+1$; ma un numero $m+1$ di termini di essa serie

Prop. 8 Lib. I. è $= \frac{\cos.(2x - m + 2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(m+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu}$; laonde la ſpinta relativa del cuneo m^{esimo} è $= \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\,\mu} \,.\, \cos.(2x - m + 2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(m + 1)\mu$. Oltre a ciò perchè il numero de' cunei componenti l' Arco intero è $= 2x + 3$, ſarà l' angolo retto $= 2x\mu + 3\mu$; e però i due angoli $2x\mu - m\mu + 2\mu$, e $m\mu + \mu$ inſieme uniti ſono uguali ad un retto, in conſeguenza $\cos.(2x - m + 2)\mu = \text{sen.}\,(m + 1)\mu$, e la ſpinta relativa del cuneo $m^{esimo} = \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\,\mu} \,.\, \text{sen}^2.(m + 1)\mu$; il che ecc.

Corollario I.

Laonde ſe ſi faccia $m = x$, s'avrà la ſpinta relativa dell' ultimo cuneo, cioè di quello collocato immediate ſopra la moſſa, $= \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\,\mu} \,.\, \cos.(x + 2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(x + 1)\mu$; e però quella della moſſa medeſima ſarà $= a + \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\,\mu} \,.\, \cos.(x + 2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(x + 1)\mu$, poichè è uguale a quella del cuneo antecedente inſieme col peſo della moſſa, la qual grandezza ridotta ſi converte nell' altra $\frac{a \,.\, \text{sen.}\,(2x + 3)\mu}{\text{sen.}\,\mu} = \frac{ar}{\text{sen.}\,\mu}$.

Corollario 2.

Se ſi chiami il raggio interiore dell' Arco intero $= b$, l' eſteriore $= c$, eſſendo già l' angolo al centro di un cuneo $= 2\mu$, ſarà la ſuperficie che lo rappreſenta $= \frac{(c^2 - b^2)\mu}{r}$; ma la ſuperficie eſprime il peſo del cuneo, laonde $a = \frac{(c^2 - b^2)\mu}{r}$; e però la ſpinta relativa del cuneo $m^{esimo} = \frac{(c^2 - b^2)2\mu}{r^2 \,.\, \text{sen.}\,\mu} \,.\, \text{sen}^2.(m + 1)\mu$; e quella della moſſa $= \frac{(c^2 - b^2)\mu}{\text{sen.}\,\mu}$.

Corol. 1 Prop. 6 Lib. I.

Dom. V Lib. I.

Corollario

COROLLARIO 3.

E se il numero de' cunei componenti l' Arco intero sia infinito, e 2μ infinitesimo, diventerà, per le cose dette nell' antecedente Corollario, la pressione relativa del cuneo m^{esimo} $= \frac{2(c^2 - b^2)}{r^2} . \text{sen}^2 . m\mu$. Sia ora AFG l' Arco intero formato di un numero infinito di cunei e OX il cuneo m^{esimo}, sarà l' angolo $ZQE = m . 2\mu = 2m\mu$, e l' angolo retto $ZQA = 2x\mu$; e però la $QI = \frac{b}{r} . \cos. 2m\mu$, e la $ZI = b - \frac{b}{r} . \cos. 2m\mu$, laonde $\frac{r^2 . ZI}{b} = r^2 - r . \cos. 2m\mu$: ma per l' equazione IX risulta $2 . \text{sen}^2 . m\mu = r^2 - r . \cos. 2m\mu$, dunque anche $\frac{r^2 . ZI}{b} = 2 . \text{sen}^2 . m\mu$; quindi la spinta relativa del cuneo m^{esimo}, o del cuneo al punto $E = \frac{c^2 - b^2}{r^2} . \frac{r^2 . ZI}{b} = \frac{c^2 - b^2}{b} . ZI$. Ma la spinta relativa della mossa risulterà, quando i cunei sieno infinitesimi, $= c^2 - b^2$.

Fig. XIII. Tav. II.

Prop. 7 Lib. I.

PROBLEMA 10. PROPOSIZIONE 10.

Trovare in un Arco intero, da cui sia stata tolta la centina, lo sfiancamento del cuneo m^{esimo}, qualunque sia il numero de' cunei che compongano l' Arco stesso.

Sia, come nell' antecedente, il numero de' cunei tra la mossa e il serraglio da ciascuna parte $= x$; bisogna ritrovare lo sfiancamento del cuneo m^{esimo} collocato da una o dall' altra parte cominciando l' enumerazione dal laterale al serraglio.

Se i pezzi componenti l' Arco intero sieno tre, cioè due

Fig. III. Tav. III. moſſe e il ſerraglio, s' è trovato lo sfiancamento *BO* della

Prop. 2 di queſto moſſa $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \cos. 2\mu$.

Se ſieno cinque, ovvero due moſſe, il ſerraglio, e un cu-

Fig. IV. Tav. III. neo per parte, diventa lo sfiancamento *XQ* del cuneo $=$

Prop. 4 di queſto $\frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \cos. 4\mu$, e lo sfiancamento *Lb* della moſſa $=$

$\frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$.

Fig. V. Tav. III. Ma poſto che i cunei ſieno ſette, o due moſſe, il ſerraglio, e due cunei per parte, rieſce lo sfiancamento *IZ* del

Prop. 6 di queſto primo cuneo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \cos. 6\mu$, lo *Kc* del ſecondo $=$

$\frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\cos. 6\mu + \cos. 4\mu)$, e quello *Lf* della moſſa $=$

$\frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\cos. 6\mu + \cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$.

Fig. VI. Tav. III. Finalmente ſuppoſti nove i pezzi dell' Arco intero, cioè due moſſe, il ſerraglio, e tre cunei per parte tra le moſſe

Prop. 8 di queſto e il ſerraglio, ſi ha lo sfiancamento *EL* del primo cuneo $=$ $\frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \cos. 8\mu$, lo *GX* del ſecondo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\cos. 8\mu + \cos. 6\mu)$, lo sfiancamento *Kc* del terzo cuneo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\cos. 8\mu + \cos. 6\mu + \cos. 4\mu)$; e per ultimo lo sfiancamento *Rg* della moſſa $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\cos. 8\mu + \cos. 6\mu + \cos. 4\mu + \cos. 2\mu)$.

Per la qual coſa chiamato x il numero de' cunei tra la moſſa e il ſerraglio, ſarà lo sfiancamento del primo cuneo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \cos. (2x + 2)\mu$, quello del ſecondo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \left(\cos. (2x + 2)\mu + \cos. 2x\mu\right)$, quello del terzo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \left(\cos. (2x + 2)\mu + \cos. 2x\mu + \cos. (2x - 2)\mu\right)$, e così ſucceſſiva-

mente; per conseguenza lo sfiancamento del cuneo m^{esimo} sarà $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \left(\cos.(2x+2)\mu + \cos.\, 2x\mu + \cos.\,(2x-2)\mu \text{ ecc...} \right)$.

E perchè della serie $\cos.(2x+2)\mu + \cos.\,2x\mu + \cos.(2x - 2)\mu$ ecc. si debbe prendere la somma di un numero m di termini, e la somma di un numero m di termini diventa $= \frac{\cos.(2x - m + 3)\mu \,.\, \text{sen.}\, m\mu}{\text{sen.}\, \mu}$, dunque sarà lo sfiancamento del cuneo $m^{esimo} = \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \frac{\cos.(2x - m + 3)\mu \,.\, \text{sen.}\, m\mu}{\text{sen.}\, \mu} = \frac{4a}{r^2} \,.\, \cos.(2x - m + 3)\mu \,.\, \text{sen.}\, m\mu$. Di nuovo essendo intero l' Arco, e l' angolo $2x\mu + 3\mu$ uguale ad un retto, s' avrà $\cos.(2x - m + 3)\mu = \text{sen.}\, m\mu$; per conseguenza lo sfiancamento del cuneo $m^{esimo} = \frac{4a}{r^2} \,.\, \text{sen}^2.\, m\mu$; il che ecc.

COROLLARIO 1.

Dunque se si faccia $m = x + 1$ si conseguirà lo sfiancamento della mossa e sarà $= \frac{4a}{r^2} \,.\, \text{sen}^2.\,(x+1)\mu$.

COROLLARIO 2.

Ma sia il raggio interiore dell' Arco a tutto sesto $= b$, l' esteriore $= c$, e il peso di un cuneo $= \frac{(c^2 - b^2)\mu}{r} = a$, essendo già l' angolo al centro di un cuneo $= 2\mu$: si troverà pertanto lo sfiancamento del cuneo $m^{esimo} = \frac{(c^2 - b^2)4\mu}{r^2} \,.\, \text{sen}^2.\, m\mu$; e quello della mossa $= \frac{(c^2 - b^2)4\mu}{r^2} \,.\, \text{sen}^2.\,(x+1)\mu$.

Corollario 3.

E supposto infinito il numero de' cunei componenti l' Arco intero, ma finito l' angolo ZQE; poichè è esso angolo
Fig. XIII. Tav. I. $ZQE = 2m\mu$, sarà sen. $m\mu$ quantità finita, e anche il suo quadrato sen^2. $m\mu$ sarà finito, ma μ è infinitesimo, dunque anche gli sfiancamenti de' cunei e della mossa espressi dalla formola $\frac{(c^2 - b^2)4\mu}{r^2}$. sen^2. $m\mu$ saranno infinitesimi di quell' ordine, di cui è μ: ma di questo caso si parlerà ancora in altro luogo.

PROBLEMA II. PROPOSIZIONE II.

Dato un Arco scemo formato del serraglio, delle mosse, e di un numero qualsivoglia x di cunei posti da ciascuna parte tra le mosse e il serraglio; trovare la spinta relativa del cuneo m^{esimo} in ordine, da una parte o dall' altra dell' Arco scemo, dopo disarmate le centine.

Fig. II. Tav. III. Chiamisi al solito la gravità di un cuneo $= a$, e il suo angolo al centro $= 2\mu$: ma l' angolo retto BDX si dica $= q\mu$, essendo q qualunque numero intero o rotto, razionale o irrazionale. Si divida poi l' Arco scemo in tre pezzi, indi in cinque, appresso in sette e nove, e ritrovisi l' ordine col quale procedono le spinte relative del serraglio e de' cunei; finalmente si cerchi la loro espression generale per qualunque numero di pezzi. Si troverà pertanto, che (fatto il numero de' cunei tra la mossa e il serraglio $= x$, onde il numero di tutti i pezzi componenti l' Arco scemo sia $= 2x + 3$) la spinta relativa del serraglio riesce $= \frac{2a}{r}$. cos. $(q - 1)\mu$, quella del primo cuneo ad esso laterale $= \frac{2a}{r}$. (cos. $(q - 1)\mu$ + cos. $(q - 3)\mu$), la

ſpinta relativa del ſecondo cuneo $= \frac{2a}{r} \cdot \big(\cos.(q-1)\mu +$ $\cos.(q-3)\mu + \cos.(q-5)\mu\big)$, e così ſucceſſivamente; laonde la ſpinta relativa del cuneo m^{esimo} ſarà $= \frac{2a}{r} \cdot \big(\cos.(q-1)\mu$ $+ \cos.(q-3)\mu + \cos.(q-5)\mu$ ecc. ....$\big)$. E poichè è manifeſto che nella ſerie di queſt' eſpreſſione fa d' uopo aſſumere tanti termini quante unità ſono in $m+1$, e la ſomma di un numero $m+1$ di termini della ſerie medeſima ſi ritrova $=$ $\frac{\cos.(q-m-1)\mu \cdot \text{sen.}(m+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu}$, dunque ſarà la ſpinta relativa Prop. 8 Lib. I.

del cuneo m^{esimo} è $= \frac{2a}{r \cdot \text{sen.}\,\mu} \cdot \cos.(q-m-1)\mu \cdot \text{sen.}(m+1)\mu$.
Di nuovo eſſendo retto l' angolo $q\mu$, i due angoli $(q-m-1)\mu$ e $(m+1)\mu$ inſieme uniti uguaglieranno un retto, e però $\cos.(q-m-1)\mu = \text{sen.}(m+1)\mu$, dunque finalmente la ſpinta relativa del cuneo m^{esimo} è $= \frac{2a}{r \cdot \text{sen.}\,\mu} \cdot \text{sen}^2.(m+1)\mu$; il che ecc.

COROLLARIO I.

Procedendo nello ſteſſo modo ſi potrà ritrovare lo sfiancamento del cuneo $m^{esimo} = \frac{4a}{r^2} \cdot \text{sen}^2.\, m\mu$. Ovvero in altro modo, ſia *RF* il cuneo m^{esimo} dell' Arco ſcemo *ABC*, e ſia la linea *bk*, condotta dal ſuo centro di gravità *b* in direzione perpendicolare a *FI*, uguale alla ſpinta relativa del cuneo ad eſſo immediatamente ſuperiore; dunque, ſoſtituendo $m-1$ in luogo di m, s' avrà per la Propoſizione la Fig. II. Tav. III.

$bk = \frac{2a}{r \cdot \text{sen.}\,\mu} \cdot \text{sen}^2.\, m\mu$. Si tiri poi la *bn* perpendicolare alla commeſſura *RO* e ſi compia il parallelogrammo *bmkn*; dinoterà *bm* lo sfiancamento del cuneo m^{esimo} *RF*: ma come *bk*: *bm* :: sen. *mbn* : sen. *kbn* :: cos. μ : sen. 2μ, dunque ſtarà $\frac{2a}{r \cdot \text{sen.}\,\mu}$:

$sen^2.m\mu : bm :: cos.\mu : sen.2\mu :: r : 2.sen.\mu$; e però lo sfiancamento bm del cuneo m^{esimo} sarà $= \frac{4a}{r^2}.sen^2.m\mu$, come prima.

Corollario 2.

Se si prenda $m = x + 1$ s'avrà lo sfiancamento della mossa $= \frac{4a}{r^2}.sen^2.(x+1)\mu$: ma per avere la di lei spinta relativa bisognerà operare nella seguente maniera. Facciasi $m = x$; dunque sarà la spinta relativa del cuneo che giace sopra

Fig. cit. la mossa $= \frac{2a}{r.sen.\mu}.sen^2.(x+1)\mu$. Ora sia ug la gravità della mossa e condotte le up uf perpendicolari alle sue commessure si compia al solito il parallelogrammo $ufgp$: è manifesto per le cose dette nell' antecedenti, ancora applicabili agli Archi scemi, che se alla spinta relativa del cuneo superiore alla mossa si aggiunga la uf avrassi nella somma la spinta relativa della mossa medesima. E perchè vi ha in tutto l' Arco scemo un numero $2x+3$ di cunei, sarà l' angolo $ADB = (2x+3)\mu$, e però l' angolo $LDB = (2x+1)\mu$, e $cos.LDB = cos.(2x+1)\mu$: ma come $ug : uf :: sen.fup : sen.gup$, ed il seno dell'angolo fup è uguale a $sen.2\mu$, e parimenti il seno dell'angolo gup è uguale al seno di LDX o al coseno di LDB, dunque $a : uf :: sen.2\mu : cos.(2x+1)\mu$, laonde $uf = \frac{a}{sen.2\mu}.cos.(2x+1)\mu$, e la spinta relativa della mossa $= \frac{2a}{r.sen.\mu}.sen^2.(x+1)\mu + \frac{a}{sen.2\mu}.cos.(2x+1)\mu$. In oltre es-

Prop. 7 Lib. I. sendo, per l' equazione IX, $2.sen^2.(x+1)\mu = r^2 - r.cos.(2x+2)\mu$, sarà ancora $\frac{2a}{r.sen.\mu}.sen^2.(x+1)\mu + \frac{a}{sen.2\mu}.cos.(2x+1)\mu = \frac{ar}{sen.\mu} - \frac{a.cos.(2x+2)\mu}{sen.\mu} + \frac{a.cos.(2x+1)\mu}{sen.2\mu} = \frac{ar}{sen.\mu} - \frac{2a.cos.\mu.cos.(2x+2)\mu}{r.sen.2\mu} + \frac{a.cos.(2x+1)\mu}{sen.2\mu} = \frac{ar}{sen.\mu}$

$-\frac{a \cdot \cos.(2x+3)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}-\frac{a \cdot \cos.(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}+\frac{a \cdot \cos.(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}=$
$\frac{ar}{\text{sen.}\,\mu}-\frac{a \cdot \cos.(2x+3)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$; quindi nell' Arco ſcemo, tanto dalle quantità $\frac{2a}{r \cdot \text{sen.}\,\mu} \cdot \text{sen}^2.(x+1)\mu+\frac{a}{\text{sen.}\,2\mu} \cdot \cos.(2x+1)\mu$, che dall'altre $\frac{ar}{\text{sen.}\,\mu}-\frac{a \cdot \cos.(2x+3)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$ ſarà eſpreſſa la ſpinta relativa della moſſa, reſtando ſempre il numero de' cunei componenti l' Arco ſcemo $=2x+3$.

Corollario 3.

E perchè s' è trovata la ſpinta relativa del cuneo m$^{e\text{ſimo}}$ $=\frac{2a}{r \cdot \text{sen.}\,\mu} \cdot \text{sen}^2.(m+1)\mu$, e lo ſfiancamento di eſſo cuneo $=\frac{4a}{r^2} \cdot \text{sen}^2.\,m\mu$ sì nell'Arco ſcemo, che nell'intero; e ſimilmente ſe nell' eſpreſſione $\frac{ar}{\text{sen.}\,\mu}-\frac{a \cdot \cos.(2x+3)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$ della ſpinta relativa della moſſa nell' Arco ſcemo, ſi ſupponga l' angolo $(2x+3)\mu$ uguale ad un retto, diviene allora $\cos.(2x+3)\mu=0$ ed eſſa ſpinta $=\frac{ar}{\text{sen.}\,\mu}$, come appunto s' è trovato nell' Arco intero: ſi potrà dunque dire che le ſteſſe identiche formole ſervono per gli Archi ſcemi e per gl' interi.

Prop. 9 e 10 Prop. 11 e ſuo Cor. 1 di queſto

Cor. antec.

Corol. 1 Prop. 9 di queſto

Corollario 4.

Laonde ſi proverà che anche negli Archi ſcemi lo ſfiancamento de' cunei (ſuppoſto infiniteſimo l' angolo μ e infinito il numero de' cunei) è una quantità infiniteſima dello ſteſſo ordine di cui è μ; che la ſpinta relativa del cuneo infiniteſimo RF è $=\frac{c^2-b^2}{b} \cdot BT$, dove c eſprime il raggio eſte-

Fig. II. Tav. III.

riore dell' Arco ſcemo, b l' interiore; e finalmente che la ſpinta relativa della moſſa diventa $= \frac{c^2 - b^2}{b} . BE$.

PROBLEMA 12. PROPOSIZIONE 12.

Se tra i pilaſtri di un Arco intero ſia meſſa la centina, e da una parte ſieno collocati ſulla centina la moſſa e quanti cunei ſi vogliano, che non giungano però alla ſommità, indi ſi adatti alla ſuperficie ſuperiore del più alto cuneo un piano immobile e poi ſi diſarmi la centina; determinare la preſſione del cuneo ſul piano immobile, le ſpinte relative eſercitate da ogni cuneo ed i loro riſpettivi sfiancamenti.

Fig. VII. Tav. III. Tra i pilaſtri di un Arco intero ſia meſſa la centina ASC, poi da una parte la moſſa AG e quanti cunei ſi vogliano di numero x, il ſuperior de' quali HB non giunga al ſerraglio; ſi ſupponga dopo ciò adattato al piano ſuperiore del primo cuneo HB il piano EF immobile, cioè capace di reſiſtere ad ogni sforzo, e ſi diſarmi la centina; biſogna trovare la preſſione del cuneo HB ſul piano EF, le ſpinte relative e gli sfiancamenti de' cunei.

Sia la gravità de' cunei $= a$, e il loro angolo al centro $= 2\mu$; ſarà l' angolo $ADB = (x + 1)2\mu = (2x + 2)\mu$, e però l'angolo $ADN = 2x\mu$. Pertanto è certo che ſe ſi conduca dal centro di gravità I del primo cuneo ſuperiore la linea verticale $IK = a$, poi ſi tirino le IL IM perpendicolari alle EF HN e ſi compia il parallelogrammo $IMKL$, eſprimerà IL la preſſione ſul piano immobile EF; ma come $IK : IL :: \text{sen.}\, MIL : \text{sen.}\, MIK$, e $\text{sen.}\, MIL = \text{sen.}\, BDN = \text{sen.}\, 2\mu$, e $\text{sen.}\, MIK = \text{sen.}\, ADN = \text{sen.}\, 2x\mu$, dunque come $a : IL :: \text{sen.}\, 2\mu : \text{sen.}\, 2x\mu$; per conſeguenza

guenza la pressione IL sul piano immobile è $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\, 2x\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$:

Di nuovo dagli altri centri di gravità de' rispettivi cunei si tirino linee rette uguali ad IK, poi si costruiscano parallelogrammi aventi esse rette per diagonali ed i loro lati perpendicolari alle commessure, onde dividere le forze della gravità e poter sottrarre le parti delle nuove forze, che fra loro scambievolmente si distruggono, e finalmente determinare le spinte relative e gli sfiancamenti de' cunei col metodo descritto nelle prime Proposizioni di questo Libro. Sarà dunque la spinta relativa del primo cuneo $HB = \frac{2a}{r} \,.\, \cos.\, 2x\mu$, quella del secondo $= \frac{2a}{r} \,.\, (\cos.\, 2x\mu + \cos.\, (2x-2)\mu)$, la spinta relativa del terzo $= \frac{2a}{r} \,.\, (\cos.\, 2x\mu + \cos.\, (2x-2)\mu + \cos.(2x-4)\mu)$, e così in progresso; dunque la spinta relativa del cuneo m^{esimo} è $= \frac{2a}{r} \,.\, (\cos.\, 2x\mu + \cos.\, (2x-2)\mu + \cos.\, (2x-4)\mu$ ecc.....). E perchè della serie implicata nell' espressione della spinta relativa va preso un numero di termini m, e la somma generale di un numero m di termini di essa serie è $= \frac{\cos.\, (2x-m+1)\mu \,.\, \text{sen.}\, m\mu}{\text{sen.}\, \mu}$, diverrà la spinta relativa del cuneo $m^{esimo} = \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\, \mu} \,.\, \cos.\, (2x-m+1)\mu \,.\, \text{sen.}\, m\mu$.

Allo stesso modo essendo per le cose dette lo sfiancamento del primo cuneo $HB = 0$, quello del secondo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \cos.\, 2x\mu$, quello del terzo $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\cos.\, 2x\mu + \cos.\, (2x-2)\mu)$, lo sfiancamento del quarto $= \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, (\cos.\, 2x\mu + \cos.\, (2x-2)\mu + \cos.\, (2x-4)\mu)$, e così successivamente, sarà lo

sfiancamento del cuneo $m^{esimo} = \frac{4a \,.\, \text{sen.}\, \mu}{r^2} \,.\, \Big(\cos.\, 2x\mu + \cos.\,(2x - 2)\mu + \cos.\,(2x - 4)\mu \text{ ecc.} \ldots \Big)$; e nella ſerie di queſt' eſpreſſione ſarà d'uopo prendere un numero di termini $m - 1$; ma la ſomma di un numero di termini $m - 1$ della ſerie ſuddetta è $= \frac{\cos.\,(2x - m + 2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(m - 1)\mu}{\text{sen.}\,\mu}$; e però lo sfiancamento del cuneo $m^{esimo} = \frac{4a}{r^2} \,.\, \cos.\,(2x - m + 2)\mu \,.\, \text{sen.}\,(m - 1)\mu$; laonde ſi è determinato, ne' cunei coſtituenti una parte di Arco intero e ſoſtenuti ſuperiormente da un piano immobile, la preſſione del primo cuneo ſul piano, le loro ſpinte relative, e gli sfiancamenti; il che ecc.

COROLLARIO.

E perchè la ſpinta relativa della moſſa come negli Archi interi così nelle loro parti è uguale a quella del cuneo che immediate la precede inſieme col proprio ſuo peſo, che gravita tutto ſulla moſſa, ſarà la ſpinta della moſſa $AG = a + \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\,\mu} \,.\, \cos.\,(x + 1)\mu \,.\, \text{sen.}\, x\mu = a + \frac{a \,.\, \text{sen.}\,(2x + 1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{a \,.\, \text{sen.}\,\mu}{\text{sen.}\,\mu} = \frac{a \,.\, \text{sen.}(2x + 1)\mu}{\text{sen.}\,\mu}$.

PROBLEMA 13. PROPOSIZIONE 13.

In un Arco compoſto trovare le ſpinte relative, e gli sfiancamenti de' cunei, qualunque ne ſia il loro numero, dopo tolta la centina.

Fig. VIII. Tav. III. Sia l' Arco compoſto *ABC* compreſo dal ſerraglio *D*, da due moſſe, e da un numero x di cunei tra ciaſcuna delle moſſe e il ſerraglio; ſia poi da una parte *VX* il cuneo m^{esimo} in ordine cominciando dal laterale al ſerraglio: ſi domanda la ſpinta relativa e lo sfiancamento del cuneo *VX* dopo diſarmata la centina.

Si prenda il centro di gravità M del cuneo laterale al ferraglio, e si tiri la retta MD perpendicolare alla commessura EB de' due cunei la quale concorra in D colla saetta Bm prolungata; poi si conduca ancora la DK perpendicolare all' altra commessura del serraglio; e fatta DI proporzionale alla di lui gravità si compia il parallelogrammo $DILK$: esprimerà DI la pressione del serraglio sul cuneo laterale, e sia $DI = p$. Di nuovo se in luogo del serraglio dell' Arco composto si adattasse alla superficie superiore del primo cuneo SB un piano immobile EF, poichè AB è parte di Arco intero, sarebbe la pressione di esso cuneo sul piano $EF = \frac{a \, . \, \text{sen.} \, 2x\mu}{\text{sen.} \, 2\mu}$, Prop. antec.

dove a dee rappresentare il peso di un cuneo, e 2μ il suo angolo al centro. Pertanto o p è uguale alla stessa quantità $\frac{a \, . \, \text{sen.} \, 2x\mu}{\text{sen.} \, 2\mu}$, o maggiore, ovvero minore.

Sia primieramente $p = \frac{a \, . \, \text{sen.} \, 2x\mu}{\text{sen.} \, 2\mu}$. E poichè il serraglio dell' Arco composto preme tanto il cuneo laterale SB quanto da esso viene premuto, torna lo stesso pe' calcoli delle spinte relative e degli sfiancamenti, o porre il piano immobile EF, ovvero in suo luogo il serraglio dell' Arco, e però sarà la spinta relativa del cuneo m^{esimo} $VX = \frac{2a}{r \, . \, \text{sen.} \, \mu} \, . \, \text{cos.} \, (2x - m + 1)\mu \, . \, \text{sen.} \, m\mu$, e il suo sfiancamento $= \frac{4a}{r^2} \, . \, \text{cos.} \, (2x - m + 2)\mu \, . \, \text{sen.} \, (m - 1)\mu$. Prop. cit.

Ma sia in secondo luogo $p > \frac{a \, . \, \text{sen.} \, 2x\mu}{\text{sen.} \, 2\mu}$, e si faccia $p - \frac{a \, . \, \text{sen.} \, 2x\mu}{\text{sen.} \, 2\mu} = q$, poi al centro di gravità M del primo cuneo SB si ponga la linea retta $MN = q$ per diritto alla MD, la qual MN esprimerà la spinta relativa del serraglio. Sia poi MR perpendicolare alla ST e di tal grandezza che valga ad esprimere la spinta relativa che avrebbe il primo cuneo SB se al piano immobile e non al serraglio s' appoggiasse; e prolun-

gata QM in O, si compia il parallelogrammo $MONP$. Dunque in questo caso vi passa qualche differenza dal surrogare il serraglio al piano EF, e la differenza consiste in esservi ora un' altra forza MN, o la spinta relativa del serraglio, che col piano non vi sarebbe, la quale necessariamente debbe in qualche parte alterare i risultamenti. In fatti MO mostra lo sfiancamento del primo cuneo, che nell' ipotesi del piano EF non n' aveva di sorte; così, essendo MN uguale a MP, la spinta relativa del cuneo SB non sarà più MR, ma $MN + MR$, vale a dire che alla MR bisogna aggiungere la spinta relativa del serraglio. Lo stesso si proverà nel secondo, terzo, quarto cuneo e successivamente; laonde essendosi trovato, che la spinta relativa del cuneo m^{esimo} VX nell' ipotesi del piano EF è $= \frac{2a}{r \cdot \text{sen.}\, \mu} \cdot \text{cos.}\,(2x - m + 1)\mu \cdot \text{sen.}\, m\mu$, s' avrà la spinta relativa del cuneo m^{esimo} $VX = q + \frac{2a}{r \cdot \text{sen.}\, \mu} \cdot \text{cos.}\,(2x - m + 1)\mu \cdot \text{sen.}\, m\mu$. E passando alla ricerca del di lui sfiancamento, si prenda la spinta relativa Zb del cuneo immediate superiore ad VX e si metta dal suo centro di gravità Z in direzione perpendicolare a XY, poi prolungata QZ, si compia il parallelogrammo $Zabc$: sarà (sostituendo nell' espressione generale delle spinte relative $m - 1$ in luogo di m) la $Zb = q + \frac{2a}{r \cdot \text{sen.}\, \mu} \cdot \text{cos.}\,(2x - m + 2)\mu \cdot \text{sen.}\,(m - 1)\mu$; ma come $Zb : Za :: \text{sen.}\, aZc : \text{sen.}\, bZc :: \text{cos.}\, \mu : \text{sen.}\, 2\mu :: r : 2 \cdot \text{sen.}\, \mu$; e però $Za = \frac{2q}{r} \cdot \text{sen.}\, \mu + \frac{4a}{r^2} \cdot \text{cos.}\,(2x - m + 2)\mu \cdot \text{sen.}\,(m - 1)\mu$, e così sarà determinato lo sfiancamento del cuneo VX.

Sia finalmente in terzo luogo $p < \frac{a \cdot \text{sen.}\, 2x\mu}{\text{sen.}\, 2\mu}$, e sia di nuovo $\frac{a \cdot \text{sen.}\, 2x\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} - p = q$; e per diritto alle DI DK si pongano le Di Dk uguali ciascuna a q. Non vi sarà altro divario, com' è manifesto, tra la supposizione del piano e quella del serraglio, se non che in questa vi sarà dalla parte del cuneo VX

una forza *Di*, che spinge all'insù il serraglio medesimo, ma le spinte relative e gli sfiancamenti de' cunei resteranno invariati. Lo stesso accaderà dall' altra parte dell' Arco composto, e $Dk = Di$ esprimerà altra forza che spigne all' insù il serraglio; quindi compiuto il parallelogrammo *Dilk*, la diagonale *Dl*, che riuscirà per diritto alla *DB* e verticale, mostrerà la direzione e la forza con cui il serraglio è spinto all'insù, la qual forza debbe essere sostenuta dalle sopraccentine, o in altro modo, dunque ecc.

COROLLARIO I.

Per conseguenza negli Archi composti dove accada il primo o il terzo caso considerato nella Proposizione, sarà la spinta relativa della mossa $= a + \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\, \mu} \,.\, \text{cos.}\,(x+1)\mu \,.\, \text{sen.}\, x\mu$ $= \frac{a \,.\, \text{sen.}\,(2x+1)\mu}{\text{sen.}\, \mu}$: ma nel secondo caso sarà $= q + a + \frac{2a}{r \,.\, \text{sen.}\, \mu} \,.\, \text{cos.}\,(x+1)\mu \,.\, \text{sen.}\, x\mu = q + \frac{a \,.\, \text{sen.}\,(2x+1)\mu}{\text{sen.}\, \mu}$. Equaz. VI Prop. 7 Lib. I

COROLLARIO 2.

Similmente sarà lo sfiancamento della mossa nel primo e terzo caso $= \frac{4a}{r^2} \,.\, \text{cos.}\,(x+1)\mu \,.\, \text{sen.}\, x\mu$, e nel secondo sarà $= \frac{2q}{r} \,.$ $\text{sen.}\, \mu + \frac{4a}{r^2} \,.\, \text{cos.}\,(x+1)\mu \,.\, \text{sen.}\, x\mu$.

COROLLARIO 3.

Si dica il raggio interiore *QV* di una e dell' altra parte dell' Arco composto $= b$, e l'esteriore $Q\text{Æ} = c$; sarà il peso di un cuneo rappresentato da $\frac{(c^2 - b^2)\mu}{r} = a$. Si supponga ora infinito il numero de' cunei formanti l' Arco e 2μ infinitesimo, ma finito l' arco *BY*, sarà la spinta relativa del

cuneo m^{esimo} VX nel primo e terzo caſo, dopo fatte le ſoſtituzioni, $= \frac{2\mu.(c^2-b^2)}{r^2.\text{sen.}\,\mu}.\cos.(2x-m)\mu.\text{sen.}\,m\mu = \frac{2(c^2-b^2)}{r^2}.$ $\cos.(2x-m)\mu.\text{sen.}\,m\mu$; e nel ſecondo $= q + \frac{2(c^2-b^2)}{r^2}.\cos.(2x-m)\mu.\text{sen.}\,m\mu$: ma lo sfiancamento nel primo e terzo caſo ſarà $= \frac{4\mu(c^2-b^2)}{r^2}.\cos.(2x-m)\mu.\text{sen.}\,m\mu$, e nel ſecondo $= \frac{2q\mu}{r} + \frac{4\mu(c^2-b^2)}{r^2}.\cos.(2x-m)\mu.\text{sen.}\,m\mu$. Anzi perchè nella ſuppoſizione de' cunei infinitamente piccioli diventa la preſſione $\frac{a.\text{sen.}\,2x\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$ del primo cuneo contro il ſerraglio $= \frac{c^2-b^2}{2r}.\text{sen.}\,2x\mu$, e però $p - \frac{a.\text{sen.}\,2x\mu}{\text{sen.}\,2\mu} = p - \frac{c^2-b^2}{2r}.\text{sen.}\,2x\mu = q$, s' avrà nel ſecondo caſo la ſpinta relativa del cuneo m^{esimo} $= p - \frac{c^2-b^2}{2r}.\text{sen.}\,2x\mu + \frac{2(c^2-b^2)}{r^2}.\cos.(2x-m)\mu.$
Equaz. VI Prop. 7 Lib. I. $\text{sen.}\,m\mu = p - \frac{c^2-b^2}{2r}.\text{sen.}\,2x\mu + \frac{c^2-b^2}{r}.(\text{sen.}\,2x\mu - \text{sen.}(2x-2m)\mu) = p + \frac{c^2-b^2}{2r}.\text{sen.}\,2x\mu - \frac{c^2-b^2}{r}.\text{sen.}(2x-2m)\mu$. E poichè ne' cunei infiniteſimi l' angolo $BQA = 2x\mu$, e l' angolo $BQY = 2m\mu$, onde l' angolo $YQA = (2x-2m)\mu$; ſarà $\text{sen.}\,2x\mu = \frac{r.Bm}{b}$, e $\text{sen.}(2x-2m)\mu = \frac{r.Ye}{b}$; laonde la ſpinta relativa del cuneo infiniteſimo VX ſarà nel ſecondo caſo $= p + \frac{c^2-b^2}{2b}.Bm - \frac{c^2-b^2}{b}.Ye$; e ſimilmente operando ſi troverà eſſere eſſa negli altri due caſi $= \frac{c^2-b^2}{b}.(Bm-Ye)$. Fatta poi oſſervazio-

ne ſui valori poco prima ritrovati degli sfiancamenti, ſi vedrà che in tutti e tre i caſi ſono quantità infiniteſime dello ſteſſo ordine di cui è μ.

S c o l i o.

Se il punto D (*dove la* MD, *condotta dal centro di gravità* M *del primo cuneo* SB *perpendicolarmente alla commeſſura* EB, *incontra la ſaetta* Bm *prolungata*) *ſia anche centro di gravità del ferraglio, allora tutti gli sfiancamenti e le ſpinte relative de' cunei dell' Arco composto partiranno da' loro riſpettivi centri di gravità. Ma ſe così non foſſe, biſognerebbe dal centro di gravità del ferraglio tirare una linea perpendicolare alla* EB, *e dal centro di gravità* M *del primo cuneo* SB *una linea verticale per avere nel loro concorſo il punto donde partirebbero lo sfiancamento e la ſpinta relativa di eſſo cuneo* SB; *e ſimilmente da queſto nuovo punto condotta una perpendicolare alla commeſſura* ST *e dal centro di gravità del ſecondo cuneo una verticale, s' avrebbe nel loro concorſo il punto da cui partirebbero lo sfiancamento e la ſpinta relativa del ſecondo cuneo; e così continuando ſi troverebbero gli altri punti pe' cunei inferiori. La cagione di ciò appariſce ancora più chiaramente quando, in luogo di procedere col metodo delle diſtruzioni delle forze da noi in preferenza ſeguito, ſi paſſaſſe all' altro accennato nel Corollario della prop.* 3 *di queſto. In ſiffatta ſuppoſizione adunque i punti da' quali partono le forze ſaranno poſti in direzione verticale co' centri di gravità de' cunei, e da queſti ugualmente diſtanti, cioè per quanto importa la grandezza della verticale del primo cuneo, la quale vien determinata dalla perpendicolare tirata dal centro di gravità del ferraglio alla loro comune commeſſura. Quantunque però i punti donde partono le forze non ſieno gli ſteſſi, nulladimeno tirando da queſti linee ai centri dell' arco e operando al ſolito ſi troveranno le forze ſuddette.*

PROBLEMA 14. PROPOSIZIONE 14.

In un Arco ſcemo formato di un numero qualſivoglia di cunei, dal quale ſia ſtata tolta la centina, determinare il momento dello sfiancamento di un dato cuneo.

Fig. II. Tav. III. Sia l' Arco ſcemo ABC formato di due moſſe, del ferraglio, e di un numero x di cunei per parte tra il ferraglio e le moſſe, di modo che tutti i pezzi componenti l' Arco ſieno $2x + 3$ di numero: ſi domanda il momento dello ſfiancamento del cuneo RF m^{esimo} in ordine. Si chiami il raggio interiore $DA = b$, la groſſezza del pilaſtro $= G$, e la ſua altezza $Ab = a$.

Dom. III. Dom. IV. Lib. I. Il pilaſtro AW non può eſſere mobile che d' intorno al punto W, e lo ſfiancamento del cuneo viene dalla ſopraccentina ſoſtenuto, la quale ſi ſuppone ſolidamente attaccata a' pilaſtri: dunque il momento dello ſfiancamento ſarà uguale al di lui prodotto per la perpendicolare WQ condotta dal punto W alla DH, che paſſa pel centro di gravità del cuneo RF. E perchè RF è il cuneo m^{esimo} in ordine cominciando l' enumerazione dal laterale al ferraglio, ſarà l' angolo $NDR = 2m\mu$; ma l' angolo NDR è uguale all' angolo BDH; dunque anche l' angolo BDH è $= 2m\mu$; e però sen. $BDH =$ sen. $2m\mu =$ cos. HDZ, e cos. $BDH =$ cos. $2m\mu =$ sen. HDZ. Di nuovo eſſendo l' angolo $ADB = 2x\mu + 3\mu$, ſarà sen. $ADe =$ cos. ADB $=$ cos. $(2x + 3)\mu$; la AD poi è $= b$, laonde s' avrà $Ae = \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu}{r}$, e $De = \frac{b . \text{sen.} (2x + 3)\mu}{r}$: ma tutta la Ab $= a$, dunque la rimanente $eb = XW = a - \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu}{r}$.

In oltre perchè ſta come $XW : XZ ::$ cos. XWZ : sen. XWZ, e l' angolo XWZ è uguale all' angolo HDZ, ſarà come $a - \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu}{r} : XZ ::$ sen. $2m\mu$: cos. $2m\mu$; per conſeguenza la $XZ = \frac{a . \cos. 2m\mu}{\text{sen.} 2m\mu} - \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu . \cos. 2m\mu}{r . \text{sen.} 2m\mu}$: in ſimil modo perchè ſta $XW : WZ ::$ cos. $XWZ : r$, ſi conſeguirà $WZ = \frac{ar}{\text{sen.} 2m\mu} - \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu}{\text{sen.} 2m\mu}$. Sicchè eſſendo l' intera $DX = De + eX = \frac{b . \text{sen.} (2x + 3)\mu}{r} + G$, ſe dalla DX ſi tolga la XZ, ſi troverà la rimanente $DZ = \frac{b . \text{sen.} (2x + 3)\mu}{r} + G -$

$a . \cos. 2m\mu$

$\frac{a . \cos. 2m\mu}{\text{sen}. 2m\mu} + \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu . \cos. 2m\mu}{r . \text{sen}. 2m\mu}$. Per il che avendo *DZ* a *ZQ* la ſteſſa ragione del ſeno tutto al ſeno dell' angolo *HDZ* , ſarà *DZ* : *ZQ* :: *r* : cos. $2m\mu$, dunque la retta $ZQ = \frac{b . \text{sen}. (2x + 3)\mu . \cos. 2m\mu}{r^2} + \frac{G . \cos. 2m\mu}{r} - \frac{a . \cos^2. 2m\mu}{r . \text{sen}. 2m\mu} + \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu . \cos^2. 2m\mu}{r^2 . \text{sen}. 2m\mu}$; s' è poi dimoſtrata la $WZ = \frac{ar}{\text{sen}. 2m\mu} - \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu}{\text{sen}. 2m\mu}$, laonde tutta la $WQ = \frac{ar}{\text{sen}. 2m\mu} - \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu}{\text{sen}. 2m\mu} + \frac{b . \text{sen}. (2x+3)\mu . \cos. 2m\mu}{r^2} + \frac{G . \cos. 2m\mu}{r} - \frac{a . \cos^2. 2m\mu}{r . \text{sen}. 2m\mu} + \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu . \cos^2. 2m\mu}{r^2 . \text{sen}. 2m\mu}$: ma $\cos^2. 2m\mu = r^2 - \text{sen}^2. 2m\mu$, dunque riducendo s' avrà la $WQ = \frac{a . \text{sen}. 2m\mu}{r} + \frac{G . \cos. 2m\mu}{r} - \frac{b . \cos. (2x + 3)\mu . \text{sen}. 2m\mu}{r^2} + \frac{b . \text{sen}. (2x + 3)\mu . \cos. 2m\mu}{r^2}$; e ſoſtituendo in luogo di $- \cos. (2x + 3)\mu . \text{sen}. 2m\mu + \text{sen}. (2x + 3)\mu . \cos. 2m\mu$ l' equivalente valore $r . \text{sen}. (2x - 2m + 3)\mu$, ſarà finalmente la perpendicolare Equ. II. Prop. 7 Lib. I.

$$WQ = \frac{a . \text{sen}. 2m\mu}{r} + \frac{G . \cos. 2m\mu}{r} + \frac{b . \text{sen}. (2x - 2m + 3)\mu}{r} .$$

Sicchè eſſendo lo sfiancamento del dato cuneo m^{esimo} $RF = \frac{4a}{r^2} . \text{sen}^2. m\mu = \frac{2a}{r^2} . 2 . \text{sen}^2. m\mu = \frac{2a}{r^2} . (r^2 - r . \cos. 2m\mu) = 2a - \frac{2a}{r} . \cos. 2m\mu$, s' avrà il momento di eſſo sfiancamento $= \left(2a - \frac{2a}{r} . \cos. 2m\mu\right) . \left(\frac{a . \text{sen}. 2m\mu}{r} + \frac{G . \cos. 2m\mu}{r} + \frac{b}{r} . \text{sen}. (2x - 2m + 3)\mu\right)$; il che ecc. Cor. 1 Prop. 11 di queſto Equ. IX. Prop. 7 Lib. I.

PROBLEMA 15. PROPOSIZIONE 15.

In un Arco ſcemo formato di qualſivoglia numero di cunei, trovare la ſomma de' momenti degli sfiancamenti in un numero m di cunei, dopo diſarmata la centina.

Poſte le ſteſſe coſe dell' antecedente eſſendoſi dimoſtrato che il momento dello sfiancamento del cuneo m^{esimo} è $= \left(2a - \frac{2a}{r}.\cos.2m\mu\right).\left(\frac{\alpha.\text{sen}.2m\mu}{r} + \frac{G.\cos.2m\mu}{r} + \frac{b}{r}.\text{sen}.(2x - 2m+3)\mu\right)$, chiamiſi queſto momento $=(Z)$. E perchè l' enumerazione de' cunei comincia dal cuneo laterale al ſerraglio, ſi avrà la ſomma dei momenti fino al cuneo m^{esimo} in ordine, tolto incluſivamente, quando ſi giunga a conſeguire la ſomma di un numero m di termini della ſerie di cui (Z) ſia il termine generale. Fatta pertanto la moltiplicazione diventerà $(Z) = \frac{2a\alpha.\text{sen}.2m\mu}{r} + \frac{2aG.\cos.2m\mu}{r} + \frac{2ab}{r}.\text{sen}.(2x-2m+3)\mu$ $- \frac{2a\alpha}{r^2}.\text{sen}.2m\mu.\cos.2m\mu - \frac{2aG}{r^2}.\cos^2.2m\mu - \frac{2ab}{r^2}.\cos.2m\mu.$ $\text{sen}.(2x-2m+3)\mu$. Di nuovo ſi ha per l' equazione I,

Prop. 7 Lib. I. $2.\text{sen}.2m\mu.\cos.2m\mu = r.\text{sen}.4m\mu$, e per la X, $2.\cos^2.2m\mu = r^2 + r.\cos.4m\mu$. In oltre ſe ſia l' angolo $2m\mu$ maggiore di $(2x-2m+3)\mu$ ſi ha per l' equazione VI, $2.\cos.2m\mu.\text{sen}.(2x-2m+3)\mu = r.\text{sen}.(2x+3)\mu - r.\text{sen}.(-2x+4m-3)\mu$, laddove ſe foſſe minore, riuſcirà per la V, $2.\cos.2m\mu.\text{sen}.(2x-2m+3)\mu = r.\text{sen}.(2x+3)\mu + r.\text{sen}.(2x-4m+3)\mu = r.\text{sen}.(2x+3)\mu - r.\text{sen}.(-2x+4m-3)\mu$, nel qual ultimo binomio l' angolo del ſecondo termine ſarà negativo, ma il binomio è lo ſteſſo che nel primo caſo; unendo dunque amendue i caſi ſi dirà che $2.\cos.2m\mu.\text{sen}.(2x-2m+3)\mu$ è ſempre $= r.\text{sen}.(2x+3)\mu - r.\text{sen}.(-2x+4m-3)\mu$. Ora ſe ſi facciano queſte ſoſtituzioni nel valor di (Z), ſarà $(Z) = \frac{2a\alpha}{r}.\text{sen}.2m\mu +$

$\frac{2aG}{r}.\cos.2m\mu+\frac{2ab}{r}.\text{sen}.(2x-2m+3)\mu-\frac{ae}{r}.\text{sen}.4m\mu-aG$
$-\frac{aG}{r}.\cos.4m\mu-\frac{ab}{r}.\text{sen}.(2x+3)\mu+\frac{ab}{r}.\text{sen}.(-2x+4m-3)\mu$.

Dividasi il moltinomio (Z) in altrettanti termini generali quante sono le quantità semplici che lo compongono, come gli (A) (B) (C) (D) (E) (F) (G) (H) registrati qui sotto, che hanno tutte le quantità costanti eccetto m.

(A) T. G. $+\frac{2ae}{r}.\text{sen}.2m\mu$
(P) S. G. $+\frac{2ae}{r.\text{sen}.\mu}.\text{sen}.(m+1)\mu.\text{sen}.m\mu$

(B) T. G. $+\frac{2aG}{r}.\cos.2m\mu$
(Q) S. G. $+\frac{2aG}{r.\text{sen}.\mu}.\cos.(m+1)\mu.\text{sen}.m\mu$

(C) T. G. $+\frac{2ab}{r}.\text{sen}.(2x-2m+3)\mu$
(R) S. G. $+\frac{2ab}{r.\text{sen}.\mu}.\text{sen}.(2x-m+2)\mu.\text{sen}.m\mu$

(D) T. G. $-\frac{ae}{r}.\text{sen}.4m\mu$
(S) S. G. $-\frac{ae}{r.\text{sen}.2\mu}.\text{sen}.(2m+2)\mu.\text{sen}.2m\mu$

(E) T. G. $-aG$
(T) S. G. $-amG$

(F) T. G. $-\frac{aG}{r}.\cos.4m\mu$
(V) S. G. $-\frac{aG}{r.\text{sen}.2\mu}.\cos.(2m+2)\mu.\text{sen}.2m\mu$

$\begin{cases} (G)\ \text{T. G.}\ -\frac{ab}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu \\ (X)\ \text{S. G.}\ -\frac{amb}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu \end{cases}$

$\begin{cases} (H)\ \text{T. G.}\ +\frac{ab}{r}.\text{sen.}(-2x+4m-3)\mu \\ (Y)\ \text{S. G.}\ +\frac{ab}{r.\text{sen.}2\mu}.\text{sen.}(-2x+2m-1)\mu.\text{sen.}2m\mu \end{cases}$

Poi si trovino delle serie, di cui gli (A) (B) (C) (D) (E) (F) (G) (H) sono i termini generali, le rispettive loro somme generali (P) (Q) (R) (S) (T) (V) (X) (Y) che sono messe di sopra appresso i loro termini generali; indi si raccolgano insieme le somme parziali per avere la somma generale di un numero m di termini della serie, che ha (Z) per termine generale, e la cui somma si chiami ancora $=$ (I). Sarà dunque $(I)=\frac{2aa}{r.\text{sen.}\mu}.\text{sen.}(m+1)\mu.\text{sen.}m\mu+\frac{2aG}{r.\text{sen.}\mu}.\cos.(m+1)\mu.\text{sen.}m\mu+\frac{2ab}{r.\text{sen.}\mu}.\text{sen.}(2x-m+2)\mu.\text{sen.}m\mu-\frac{aa}{r.\text{sen.}2\mu}.\text{sen.}(2m+2)\mu.\text{sen.}2m\mu-amG-\frac{aG}{r.\text{sen.}2\mu}.\cos.(2m+2)\mu.\text{sen.}2m\mu-\frac{amb}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu+\frac{ab}{r.\text{sen.}2\mu}.\text{sen.}(-2x+2m-1)\mu.\text{sen.}2m\mu$; laonde si è determinata la somma de' momenti degli sfiancamenti di un numero m di cunei; il che ecc.

Prop. 8 Lib. I.

Corollario.

E però fatto $m=x+1$ si troverà la somma de' momenti di tutti gli sfiancamenti de' cunei fino alla mossa inclusivamente $=\frac{2aa}{r.\text{sen.}\mu}.\text{sen.}(x+2)\mu.\text{sen.}(x+1)\mu+\frac{2aG}{r.\text{sen.}\mu}.\cos.(x+2)\mu.\text{sen.}(x+1)\mu+\frac{2ab}{r.\text{sen.}\mu}.\text{sen}^2.(x+1)\mu-$

$\frac{az}{r.\,\text{sen.}\,2\mu}\,.\,\text{sen.}(2x+4)\mu\,.\,\text{sen.}(2x+2)\mu - aG(x+1) - \frac{aG}{r.\,\text{sen.}\,2\mu}\,.$ cos. $(2x+4)\mu\,.\,\text{sen.}\,(2x+2)\mu - \frac{ab}{r}\,.(x+1)\,.\,\text{sen.}\,(2x+3)\mu + \frac{ab}{r.\,\text{sen.}\,2\mu}\,.\,\text{sen.}\,\mu\,.\,\text{sen.}\,(2x+2)\mu$; e riducendo si troverà la somma intera de' momenti fino alla mossa $= \frac{az}{\text{sen.}\,\mu}\,.\cos.\mu - \frac{az}{\text{sen.}\,\mu}\,.\cos.(2x+3)\mu + \frac{aG}{\text{sen.}\,\mu}\,.\,\text{sen.}\,(2x+3)\mu - aG + \frac{abr}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{ab}{\text{sen.}\,\mu}\,.\cos.(2x+2)\mu - \frac{az}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu}\,.\cos.\,2\mu + \frac{az}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu}\,.\cos.\,(4x+6)\mu - aG(x+1) - \frac{aG}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu}\,.\,\text{sen.}\,(4x+6)\mu + \frac{aG}{2} - \frac{ab}{r}\,.(x+1)\,.\,\text{sen.}\,(2x+3)\mu + \frac{ab}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu}\,.\cos.\,(2x+1)\mu - \frac{ab}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu}\,.\cos.\,(2x+3)\mu\,.$ Prop. 7 Lib. I

PROBLEMA 16. PROPOSIZIONE 16.

Ritrovare in un Arco scemo formato di un numero qualsivoglia di cunei la somma de' momenti delle forze che tendono a rovesciare uno de' pilastri d' intorno al punto estremo della sua base, dopo disarmate le centinature.

Supponendosi adattate esternamente da ambe le parti dell' Arco scemo *ABC*, dalle impostature in su, due sopraccentine, le quali sieno attaccate fermamente a' pilastri e secondino la forma esteriore dell' Arco, ne avviene che tutte le forze sfiancanti del mezzo Arco *AB*, quante esse sono, premeranno la sopraccentina attaccata al pilastro *AW*, e però tenderanno a rovesciarlo d' intorno al punto W con una somma di momenti $= \frac{az}{\text{sen.}\,\mu}\,.\cos.\,\mu - \frac{az}{\text{sen.}\,\mu}\,.\cos.\,(2x+3)\mu$ Fig. II. Tav. III. Dom. IV Lib. I. Corol. Prop. ant.

$+ \frac{aG}{\text{sen.}\,\mu} . \text{sen.}\,(2x + 3)\mu - \frac{aG}{2}(2x + 3) + \frac{abr}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{ab}{\text{sen.}\,\mu} . \cos.(2x + 2)\mu - \frac{aa}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu} . \cos.\,2\mu + \frac{aa}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu} . \cos.\,(4x + 6)\mu - \frac{aG}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu} . \text{sen.}\,(4x + 6)\mu - \frac{ab}{r}(x + 1) . \text{sen.}(2x + 3)\mu + \frac{ab}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu} . \cos.\,(2x + 1)\mu - \frac{ab}{2\,.\,\text{sen.}\,2\mu} . \cos.\,(2x + 3)\mu$. In oltre ſe dal centro di gravità u della moſſa AM ſi conduca la ud perpendicolare al raggio DA o alla commeſſura inferiore della moſſa, e dal punto W la Wd ad eſſa DA parallela, è manifeſto, che moltiplicando per Wd la ſpinta relativa della moſſa, ſi conſeguirà il di lei momento, di cui biſogna ancora tener conto nella ricerca de' momenti delle forze che operano ſul pilaſtro AW. Imperciocchè ſe la direzione ud cada oltre il punto W dalla parte eſteriore, come nella Figura, ſi dovrà alla ſomma de' momenti delle forze sfiancanti aggiugnere il momento di eſſa ſpinta relativa, che pure s' impiegherebbe contro il pilaſtro; e viceverſa lo ſi dovrà ſottrarre dalla ſomma ſe la ud incontri la baſe, e ſi sforzi di ſoſtenere il pilaſtro; per fine ſe la ud paſſaſſe pel punto W, il momento della ſpinta relativa della moſſa ſarebbe uguale a zero, e però di niun valore contro al pilaſtro. Suppongaſi che cada dalla parte eſteriore oltre il punto W. E perchè è dato l'angolo 2μ al centro del cuneo, il raggio interiore $= b$, e l'eſteriore DM che dico $= c$, ſarà eziandio data la diſtanza Du dal centro dell'Arco al centro di gravità del cuneo, e ſarà $= \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b + c)} . \frac{\text{sen.}\,\mu}{\mu}$, per conſeguenza $Dt = \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c + b)} . \frac{\text{sen.}\,\mu\,.\,\cos.\,\mu}{r\mu}$ che ſi faccia $= \Delta$; poi dal punto W ſi tiri la Wω parallela alla ud. Oltre a ciò perchè l' altezza Ab del pilaſtro $= a$, e s' è trovato nella Prop. 14 $Ae = \frac{b}{r} . \cos.(2x + 3)\mu$, dunque $eb =$ XW $= a - \frac{b}{r} . \cos.(2x + 3)\mu$: ſimilmen-

Corol. 2. Prop. 9 Lib. I.

te perchè $De = \frac{b}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu$, e la groſſezza del pilaſtro $= G$, ſarà $DX = G + \frac{b}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu$. Per il che eſſendo come $XW : XS :: \text{cos.}\, XWS : \text{sen.}\, XWS :: \text{sen.}\, BDA : \text{cos.}\, BDA$, s' avrà ſoſtituendo $a - \frac{b}{r}.\text{cos.}(2x+3)\mu : XS :: \text{sen.}(2x+3)\mu : \text{cos.}(2x+3)\mu$; e però $XS = \frac{\text{cos.}(2x+3)\mu}{\text{sen.}(2x+3)\mu}.\left(a - \frac{b}{r}.\text{cos.}(2x+3)\mu\right)$; quindi la rimanente $DS = G + \frac{b}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu - \frac{\text{cos.}(2x+3)\mu}{\text{sen.}(2x+3)\mu}.\left(a - \frac{b}{r}.\text{cos.}(2x+3)\mu\right)$: come poi $DS : D\omega :: r : \text{cos.}\, SDA :: r : \text{sen.}(2x+3)\mu$, laonde $D\omega = \frac{G}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu + \frac{b}{r^2}.\text{sen}^2.(2x+3)\mu - \frac{a}{r}.\text{cos.}(2x+3)\mu + \frac{b}{r^2}.\text{cos}^2.(2x+3)\mu = \frac{G}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu - \frac{a}{r}.\text{cos.}(2x+3)\mu + b$; ma la $Dt = \Delta$, dunque la rimanente $\omega t = Wd = \Delta - \frac{G}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu + \frac{a}{r}.\text{cos.}(2x+3)\mu - b$. Sicchè eſſendo la ſpinta relativa della moſſa nell' Arco ſcemo $= \frac{ar}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{a.\text{cos.}(2x+3)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$, ſarà il ſuo momento $= \left(\frac{ar}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{a.\text{cos.}(2x+3)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}\right).\left(\Delta - \frac{G}{r}.\text{sen.}(2x+3)\mu + \frac{a}{r}.\text{cos.}(2x+3)\mu - b\right) = \Delta\left(\frac{ar}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{a.\text{cos.}(2x+3)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}\right) - \frac{aG}{\text{sen.}\,\mu}.\text{sen.}(2x+3)\mu + \frac{aa}{\text{sen.}\,\mu}.\text{cos.}(2x+3)\mu - \frac{abr}{\text{sen.}\,\mu} + \frac{aG}{r.\text{sen.}\,2\mu}.\text{sen.}(2x+3)\mu.\text{cos.}(2x+3)\mu - \frac{aa}{r.\text{sen.}\,2\mu}.\text{cos}^2.(2x$ Corol. 2 Prop. 11 di queſto

$+3)\mu + \frac{ab}{\text{sen. }2\mu}\,.\cos.(2x+3)\mu = \Delta\left(\frac{ar}{\text{sen. }\mu} - \frac{a\,.\cos.(2x+3)\mu}{\text{sen. }2\mu}\right)$
$-\frac{aG}{\text{sen. }\mu}\,.\text{sen.}(2x+3)\mu + \frac{az}{\text{sen. }\mu}\,.\cos.(2x+3)\mu - \frac{abr}{\text{sen. }\mu} +$
Equaz. X. Prop. 7. Lib. I. $\frac{aG}{2\,.\text{sen. }2\mu}\,.\text{sen.}(4x+6)\mu - \frac{azr}{2\,.\text{sen. }2\mu} - \frac{az}{2\,.\text{sen. }2\mu}\,.\cos.(4x+$
$6)\mu + \frac{ab}{\text{sen. }2\mu}\,.\cos.(2x+3)\mu$. Se pertanto si aggiunga a questo momento la somma de' momenti delle forze sfiancanti, sarà, riducendo, la somma totale de' momenti contro al pilastro $= \Delta\left(\frac{ar}{\text{sen. }\mu} - \frac{a\,.\cos.(2x+3)\mu}{\text{sen. }2\mu}\right) - \frac{azr}{2\,.\text{sen. }2\mu} + \frac{ab}{2.\text{sen.}2\mu}\,.$
$\cos.(2x+3)\mu + \frac{az\,.\cos.\mu}{\text{sen. }\mu} - \frac{aG}{2}\,.(2x+3) - \frac{ab}{\text{sen. }\mu}\,.\cos.(2x+$
$2)\mu - \frac{az\,.\cos.2\mu}{2\,.\text{sen. }2\mu} - \frac{ab}{r}\,.(x+1)\,.\text{sen.}(2x+3)\mu + \frac{ab}{2\,.\text{sen. }2\mu}\,.$
$\cos.(2x+1)\mu$. Ma $-\frac{azr}{2\,.\text{sen. }2\mu} + \frac{az\,.\cos.\mu}{\text{sen. }\mu} - \frac{az\,.\cos.2\mu}{2\,.\text{sen. }2\mu} =$
Equaz. X. $\frac{-az}{2r\,.\text{sen. }2\mu}\,.(r^2 + r\,.\cos.2\mu) + \frac{az\,.\cos.\mu}{\text{sen. }\mu} = \frac{-az\,.\cos^2.\mu}{2\,.\text{sen. }\mu\,.\cos.\mu} +$
$\frac{az\,.\cos.\mu}{\text{sen. }\mu} = \frac{az\,.\cos.\mu}{2\,.\text{sen. }\mu}$; parimenti $\frac{ab}{2\,.\text{sen. }2\mu}\,.\cos.(2x+3)\mu$
$-\frac{ab}{\text{sen. }\mu}\,.\cos.(2x+2)\mu + \frac{ab}{2.\text{sen. }2\mu}\,.\cos.(2x+1)\mu =$
Equaz. VII. $\frac{ab}{2\,.\text{sen. }2\mu}\,.\left(\cos.(2x+3)\mu + \cos.(2x+1)\mu\right) - \frac{2ab}{r\,.\text{sen. }2\mu}\,.$
$\cos.(2x+2)\mu\,.\cos.\mu = \frac{ab}{r\,.\text{sen. }2\mu}\,.\cos.(2x+2)\mu\,.\cos.\mu -$
$\frac{2ab}{r\,.\text{sen. }2\mu}\,.\cos.(2x+2)\mu\,.\cos.\mu = -\frac{ab}{r\,.\text{sen. }2\mu}\,.\cos.\mu.\cos.(2x$
$+2)\mu = -\frac{ab}{2\,.\text{sen. }\mu}\,.\cos.(2x+2)\mu$; dunque finalmente la somma de' momenti contro al pilastro è $= \Delta\left(\frac{ar}{\text{sen. }\mu} -\right.$

$a\,.\cos.(2x$

$$\frac{\alpha . \cos. (2x+3)\mu}{\text{sen. } 2\mu} \Big) + \frac{a\alpha . \cos. \mu}{2 . \text{sen. } \mu} - \frac{ab . \cos. (2x+2)\mu}{2 . \text{sen. } \mu} - \frac{aG}{2} (2x$$

$+ 3) - \frac{ab}{r} . (x + 1) . \text{sen. } (2x + 3)\mu$. Allo ſteſſo modo calcolando allorchè la direzione *ud* della ſpinta relativa della moſſa incontri la baſe del pilaſtro (nel qual caſo la $D\omega$ diventa maggiore della Dt) ſi troverà la ſteſſa identica formola pel riſultamento de' momenti delle forze, che operano contro il pilaſtro; ſicchè ſervirà per amendue i caſi e conſeguentemente anche per il terzo, in cui ſi pone che la *ud* paſſi pel punto W.

Corollario I.

E poichè il raggio interiore $= b$, e l' eſteriore $= c$, farà la faccia di un cuneo $= \frac{(c^2 - b^2)\mu}{r} = a$, perchè alla faccia è proporzionale il peſo; è poi $\Delta = \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c+b)} . \frac{\text{sen. } \mu \cos. \mu}{r\mu}$; laonde ſoſtituendo, ſi conſeguirà la ſomma medeſima de' momenti contro al pilaſtro $AW = \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c+b)} . \frac{\text{sen. } \mu \cos. \mu}{r\mu}$.

$$\Big(\frac{(c^2 - b^2)\mu}{\text{sen. } \mu} - \frac{\mu(c^2 - b^2) . \cos. (2x+3)\mu}{r . \text{sen. } 2\mu} \Big) + \frac{\alpha\mu(c^2 - b^2) . \cos. \mu}{2r . \text{sen. } \mu} -$$

$$\frac{b\mu(c^2 - b^2) . \cos. (2x+2)\mu}{2r . \text{sen. } \mu} - \frac{G(c^2 - b^2)}{2r} . (2x\mu + 3\mu) - \frac{b(c^2 - b^2)}{r^2} .$$

$$(x\mu + \mu) . \text{sen. } (2x+3)\mu = (c^2 - b^2) . \Big(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3r(c+b)} . \Big(\cos. \mu$$

$$- \frac{1}{2} . \cos. (2x+3)\mu \Big) + \frac{\alpha\mu . \cos. \mu}{2r . \text{sen. } \mu} - \frac{b\mu . \cos. (2x+2)\mu}{2r . \text{sen. } \mu} - \frac{G}{2r} .$$

$$(2x+3)\mu - \frac{b}{2r^2} . (2x+2)\mu . \text{sen. } (2x+3)\mu \Big) .$$

COROLLARIO 2.

Ma sia infinito il numero de' cunei componenti l' Arco
Fig. II. Tav. III. scemo e 2μ infinitamente picciolo: in questo caso l' angolo $ADB = (2x+3)\mu$ diventa $= 2x\mu$, così $\mu =$ sen. $\mu = 0$, e cos. $\mu = r$; dunque la somma de' momenti diverrà $= (c^2 - b^2)$. $\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3r(c+b)} . \left(r - \frac{1}{2} . \cos. ADB\right) + \frac{a}{2} - \frac{b}{2r} . \cos. ADB - \frac{G}{2r} . 2x\mu - \frac{b}{2r^2} . 2x\mu . \text{sen.} ADB\right)$. Perchè poi la $AD = b$, sarà la $AE = \frac{b}{r} . \text{sen.} ADB$, la $DE = \frac{b}{r} . \cos. ADB$, e l' arco $AB = \frac{b}{r} . 2x\mu$; e però fatta la saetta $BE = n$ e la semicorda $AE = p$, sarà sen. $ADB = \frac{rp}{b}$, cos. $ADB = \frac{r}{b} . (b - n)$, e $2x\mu = \frac{r}{b} . AB$; per conseguenza la somma stessa de' momenti $= (c^2 - b^2)$. $\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3b(c+b)} . \left(b - \frac{1}{2}(b-n)\right) + \frac{a}{2} - \frac{1}{2}(b-n) - \frac{G}{2b} . AB - \frac{p}{2b} . AB\right) = (c^2 - b^2) . \left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3b(c+b)} . \frac{b+n}{2} + \frac{a}{2} - \frac{1}{2}(b - n) - \frac{AB}{2b} . (G+p)\right)$: è poi $\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3b(c+b)} . \frac{b+n}{2} - \frac{1}{2}(b - n) = \frac{3bc + 3b^2}{3b(c+b)} . \frac{b+n}{2} + \frac{2c^2 - bc - b^2}{3b(c+b)} . \frac{b+n}{2} - \frac{1}{2}(b-n) = n + \frac{2c^2 - bc - b^2}{3b(c+b)} . \frac{b+n}{2}$, dunque la somma de' momenti $= (c^2 - b^2 . \left(\frac{(2c^2 - bc - b^2) . (b+n)}{6b(c+b)} + \frac{a}{2} + n - \frac{AB}{2b}(G+p)\right)$ ch' è una quantità finita come manifestamente apparisce; e se la grossezza dell' Arco sia $= g$, sicchè $c = b + g$, sostituendo si otterrà allora la somma de' momenti $= (2bg + g^2)$. $\left(\frac{(3bg + 2g^2) . (b+n)}{6b(2b+g)} + \frac{a}{2} + n - \frac{AB}{2b}(G+p)\right)$.

PROBLEMA 17. PROPOSIZIONE 17.

In un Arco intero compreso da un qualsivoglia numero di cunei, determinare la somma de' momenti delle forze che tendono a rovesciare i pilastri, dopo tolta la centina.

Negli Archi scemi s' è trovato, che la somma totale de' momenti delle forze che tendono a rovesciare i pilastri è $= (c^2 - b^2) . \left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3r(c+b)} . \left(\cos. \mu - \frac{1}{2} . \cos. (2x+3)\mu \right) + \frac{a\mu . \cos. \mu}{2r . \text{sen.} \mu} - \frac{l\mu . \cos. (2x+2)\mu}{2r . \text{sen.} \mu} - \frac{G}{2r} . (2x+3)\mu - \frac{b}{2r^2} . (2x + 2)\mu . \text{sen.} (2x+3)\mu \right)$, dove b indica il raggio interiore, c l'esteriore, a l' altezza del pilastro, G la sua grossezza, 2μ l' angolo al centro di un cuneo, e $2x+3$ il numero de' cunei componenti l' Arco scemo. Per il che se l' Arco scemo s' accrescesse fino ad essere intero, allora $(2x+3)\mu$ sarebbe angolo retto; e però $\cos. (2x+3)\mu = 0$, $\cos. (2x+2)\mu = \text{sen.} \mu$, e $\text{sen.} (2x+3)\mu = r$; dunque la somma de' momenti contro a' pilastri sarà nell' Arco intero $= (c^2 - b^2) . \left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3r(c+b)} . \cos. \mu + \frac{a\mu . \cos. \mu}{2r . \text{sen.} \mu} - \frac{l\mu}{2r} - \frac{G}{2r} . (2x+3)\mu - \frac{b}{2r} . (2x+2)\mu \right)$ $= (c^2 - b^2) . \left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3r(c+b)} . \cos. \mu + \frac{a\mu . \cos. \mu}{2r . \text{sen.} \mu} - \frac{G+b}{2r} . (2x+3)\mu \right)$. Di nuovo perchè $(2x+3)\mu$ è uguale all' angolo retto, sarà $\frac{b}{r} . (2x+3)\mu$ uguale al quadrante del raggio b, che si chiami $= Q$, sicchè se AZG sia l'arco intero riesca il quadrante $AZ = Q$, e però sostituendo, sarà la somma de' momenti contro a' pilastri $= (c^2 - b^2) . \left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3r(c+b)} \right.$.

Corol. 1 Prop. ant.

Fig. XIII. Tav. II.

$\cos.\mu + \frac{\epsilon\mu . \cos.\mu}{2r . \text{sen.}\mu} - \frac{(G+b)Q}{2b}\Big)$; il che ecc.

COROLLARIO I.

Per confeguenza fe il numero de' cunei componenti l'Arco intero fia infinito e 2μ infinitefimo, farà la fomma de' momenti contro a' pilaftri uguale alla quantità finita $(c^2 - b^2)$. $\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(c+b)} + \frac{\epsilon}{2} - \frac{(G+b)Q}{2b}\right)$; ovvero fatta la groffezza dell'Arco $= g$, onde $c = b + g$, farà effa fomma $= (2bg + g^2)$. $\left(\frac{6b^2 + 6bg + 2g^2}{3(2b+g)} + \frac{\epsilon}{2} - \frac{(G+b)Q}{2b}\right)$.

COROLLARIO 2.

Se poi il numero de' pezzi che compongono l' Arco intero fia uguale all' unità, onde l' Arco fia tutto di un pezzo folo, farà l' angolo 2μ uguale a due retti, è μ uguale ad un retto; e però $\cos.\mu = 0$, e $\text{sen.}\mu = r$; quindi la fomma de' momenti d' intorno al punto W farà $= (c^2 - b^2)$. $-$

Fig. cit. $\frac{(G+b)Q}{2b}$, ch'è una quantità negativa. E perchè la $QA = b$, e la $AL = G$, farà la $QL = WH = b + G$, la quantità poi $\frac{(c^2 - b^2)Q}{2b}$ è uguale alla metà della fuperficie di tutto l'Arco AFG o alla metà del fuo pefo, laonde in quefto cafo lo sforzo dell'Arco non è diretto a rovefciare il pilaftro d'intorno al punto W, ma anzi lo foftiene con un momento uguale al prodotto della metà del pefo dell' Arco nella fomma del raggio interiore colla groffezza del pilaftro, come dovevafi trovare. Imperciocchè poggiando l' Arco fra due fuperficie orizzontali, ci premerà ugualmente ciafcuna di effe, e le premerà colla metà del fuo pefo per la direzione verticale ZH; e per confeguenza l' uno, e l' altro pilaftro farà foftenuto con un momento uguale al prodotto della metà del

peso dell' Arco per la distanza WH dal centro del moto, come viene dalla formola somministrato.

Similmente se nella somma de' momenti contro al pilastro di un Arco scemo si faccia uguale all' unità il numero de' pezzi che lo compongono, cioè $2x + 3 = 1$, e però $x = -1$, s' avrà il momento della spinta contro al pilastro $= (c^2 - b^2) . \left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3r(c+b)} . \frac{\cos. \mu}{2} + \frac{a\mu . \cos. \mu}{2r . \mathrm{sen}. \mu} - \frac{b\mu}{2 . \mathrm{sen}. \mu} - \frac{G\mu}{2r} \right)$. Corol. 1. dell' ant.

E in fatti se dal centro di gravità di tutto il pezzo formante l' Arco scemo si conduca una linea in direzione perpendicolare alla DA, e si trovi la parte del peso che s' impiega a premere il pilastro secondo essa direzione, apparirà, che l' espressione algebraica sopraccennata è precisamente uguale al momento di questa pressione, ovvero al prodotto di essa per la linea condotta dal punto W perpendicolarmente alla perpendicolare prima. Fig. II. Tav. III.

PROBLEMA 18. PROPOSIZIONE 18.

In un Arco a sesto acuto, diviso in qualsivoglia numero di cunei, trovare il momento dello sfiancamento del cuneo m^{esimo}, dopo disarmata la centina.

Sia ABC un Arco composto, e sia AG la mossa del pilastro da una parte, e x il numero de' cunei collocati dalla parte medesima tra la mossa e il serraglio; suppongasi che la retta MD, condotta dal centro di gravità M del primo cuneo SB perpendicolarmente alla commessura EB, incontri il prolungamento della saetta Bm nel punto D centro di gravità del serraglio; sia poi VX il cuneo m^{esimo} in ordine; si domanda il momento dello sfiancamento del cuneo VX. Fig. VIII. Tav. III.

Si dica al solito il raggio interiore $QA = b$, la faccia di un cuneo o il suo peso $= a$, il suo angolo al centro $= 2\mu$, la grossezza Ad del pilastro $= G$, l' altezza $Wd = \epsilon$; e condotta dal centro di gravità Z del cuneo VX al centro Q la retta ZQ, ad essa ZQ si tiri perpendicolare la WH: sarà l' angolo

$BQA = 2x\mu + 2\mu$, l' angolo $BQZ = 2m\mu - \mu$, e però il rimanente $AQZ = (2x - 2m + 3)\mu$.

Pertanto o il ferraglio preme il cuneo laterale SB quanto da esso è premuto, o il preme di più, o meno. Nel primo e terzo caso s' è trovato lo sfiancamento del cuneo m^{esimo}

Prop. 13 di questo $VX = \frac{4a}{r^2} . \cos.(2x - m + 2)\mu . \text{sen.}(m - 1)\mu$: ma nel secondo egli è $= \frac{2q}{r} . \text{sen.}\,\mu . + \frac{4a}{r^2} . \cos.(2x - m + 2)\mu . \text{sen.}(m - 1)\mu$, dove (supponendo la pressione del ferraglio sul suo cuneo laterale $= p$, ed essendo già quella del cuneo sul ferraglio $= \frac{a . \text{sen.}\,2x\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$) debbe essere $q = p - \frac{a . \text{sen.}\,2x\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$. Prop. citat.

E poichè $Wd : dp :: \cos.\,dWp : \text{sen.}\,dWp$, e l' angolo dWp è uguale all' angolo AQZ, sarà $a : dp :: \cos.(2x - 2m + 3)\mu : \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu$; dunque $dp = \frac{a . \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu}{\cos.(2x - 2m + 3)\mu}$; e allo stesso modo si troverà $Wp = \frac{ar}{\cos.(2x - 2m + 3)\mu}$: tutta poi la $dQ = b + G$, laonde la rimanente $Qp = b + G - \frac{a . \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu}{\cos.(2x - 2m + 3)\mu}$. Di nuovo essendo nel triangolo QpH come $Qp : pH :: r : \text{sen.}\,AQZ$, s' avrà $pH = \frac{b + G}{r} . \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu - \frac{a . \text{sen}^2.(2x - 2m + 3)\mu}{r . \cos.(2x - 2m + 3)\mu}$; e per conseguenza la $WH = Wp + pH = \frac{ar}{\cos.(2x - 2m + 3)\mu} + \frac{b + G}{r} . \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu - \frac{a . \text{sen}^2.(2x - 2m + 3)\mu}{r . \cos.(2x - 2m + 3)\mu} = \frac{b + G}{r} . \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu + \frac{a}{r} . \cos.(2x - 2m + 3)\mu$. Per la qual cosa essendo il momento dello sfiancamento del cuneo m^{esimo} VX uguale al prodotto della forza sfiancante per la perpendicolare WH, im-

perocchè ponendosi che la retta MD incontri la saetta Bm prolungata nel centro di gravità D del serraglio, dal punto Z partirà la forza sfiancante medesima; e però sarà esso momento pel primo e terzo caso $= \frac{4a}{r^2} . \cos.(2x - m + 2)\mu . \text{sen.}(m - 1)\mu . \left(\frac{b + G}{r} . \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu + \frac{a}{r} . \cos.(2x - 2m + 3)\mu\right)$, ma nel secondo sarà $= \left(\frac{2q}{r} . \text{sen.}\mu + \frac{4a}{r^2} . \cos.(2x - m + 2)\mu . \text{sen.}(m - 1)\mu\right) . \left(\frac{b + G}{r} . \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu + \frac{a}{r} . \cos.(2x - 2m + 3)\mu\right)$; il che ecc. Scolio Prop. cit.

S C O L I O.

Se la retta MD *non incontri il centro di gravità del serraglio, allora la forza sfiancante non può partire dal punto* Z, *ma da altro punto collocato in direzione verticale con esso. Anzi tirata dal centro di gravità* M *del primo cuneo una linea verticale, e dal centro di gravità del serraglio una linea perpendicolare alla* EB, *finchè concorra con quella e la determini, bisognerà portare sopra o sotto* Z *la grandezza della prima verticale per avere il punto donde veramente parte la forza sfiancante del cuneo* VX: *cosicchè se la verticale prima cada per esempio sopra* M, *si porterà la sua grandezza sopra* Z, *come* Zδ, *e si conseguirà il punto* δ *ricercato. E poichè sono date le* Zδ ZQ *e l' angolo* δZQ, *si troverà anche l' angolo* δQZ; *è poi dato l' angolo* ZQA, *dunque sarà pure dato l' angolo* δQA; *indi si proceda come nella proposizione per trovare il valore della perpendicolare tirata dal punto* W *sopra* δQ. *Per conseguenza moltiplicando essa perpendicolare per la forza sfiancante del cuneo* VX, *che si dee ritrovare col metodo insegnato nello scolio citato, si determinerà il di lei momento. In questa supposizione però il calcolo riesce ancora più laborioso che nell' altra, e per questo l' abbiamo ommesso, bastandoci di aver indicato il modo da tenersi nell' intraprenderlo.* Scol. cit.

PROBLEMA 19. PROPOSIZIONE 19.

Trovare in un Arco a ſeſto acuto la ſomma de' momenti degli sfiancamenti di un numero m di cunei, dopo tolta la centina, di qualunque numero ne ſia l' Arco formato.

Fig. VIII. Tav. III. Suppoſte le ſteſſe coſe dell' antecedente, poichè il momento della forza sfiancante del cuneo mſimo VX nel primo e terzo caſo, cioè quando il ſerraglio preme ugualmente il cuneo laterale o meno di quello che da eſſo vien premuto, è uguale alla quantità $\frac{4a}{r^2} . \cos.(2x - m + 2)\mu . \text{sen.}(m - 1)\mu . \left(\frac{b + G}{r} . \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu + \frac{a}{r} . \cos.(2x - 2m + 3)\mu\right)$, che chiamiſi $= (I)$, la ſomma de' momenti di un numero m di cunei ſarà uguale alla ſomma di un numero m di termini della ſerie di cui (I) rappreſenti il termine generale: ma $\frac{4a}{r^2} . \cos.(2x$

Equaz. VI. Prop. 7 Lib. I. $- m + 2)\mu . \text{sen.}(m - 1)\mu = \frac{2a}{r} . \text{sen.}(2x + 1)\mu - \frac{2a}{r} . \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu$; dunque $(I) = \frac{a(b + G)}{r^2} . \left(2 . \text{sen.}(2x + 1)\mu . \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu - 2 . \text{sen}^2.(2x - 2m + 3)\mu\right) + \frac{aa}{r^2} . \left(2 . \text{sen.}(2x + 1)\mu . \cos.(2x - 2m + 3)\mu - 2 . \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu .\right.$

Equaz. VIII. $\left.\cos.(2x - 2m + 3)\mu\right)$. Di nuovo eſſendo $2 . \text{sen.}(2x + 1)\mu . \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu = r . \cos.(2m - 2)\mu - r . \cos.(4x - 2m + 4)\mu$,

Equaz. IX. $2 . \text{sen}^2.(2x - 2m + 3)\mu = r^2 - r . \cos.(4x - 4m + 6)\mu$,

Equaz. V. $2 . \text{sen.}(2x + 1)\mu . \cos.(2x - 2m + 3)\mu = r . \text{sen.}(4x - 2m + 4)\mu + r . \text{sen.}(2m - 2)\mu$, e per fine $2 . \text{sen.}(2x - 2m + 3)\mu . \cos.(2x$

Equaz. I. $- 2m + 3)\mu = r . \text{sen.}(4x - 4m + 6)\mu$, ſarà $(I) = \frac{a(b + G)}{r} . \left(\cos.(2m - 2)\mu - \cos.(4x - 2m + 4)\mu - r + \cos.(4x - 4m + 6)\mu\right)$

$+ 6)\mu) + \frac{a\alpha}{r}($ sen. $(4x - 2m + 4)\mu +$ sen. $(2m - 2)\mu -$ sen. $(4x - 4m + 6)\mu)$. Per la qual cosa spezzando questo termine generale in tanti termini quante sono le quantità semplici che lo compongono, poi prendendo le somme di un numero m di termini delle serie parziali a cui corrispondono, e unendole insieme, il tutto col metodo adoperato nella Proposizione 15 di questo, si conseguirà per la somma di un numero m di termini dell' intera serie che ha (I) per termine generale, la quantità

$$\frac{a(b+G)}{r} . \left(\frac{\text{cos.}(m-1)\mu . \text{sen.}\, m\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{\text{cos.}(4x-m+3)\mu . \text{sen.}\, m\mu}{\text{sen.}\,\mu} - rm + \frac{\text{cos.}(4x-2m+4)\mu . \text{sen.}\, 2m\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} \right) + \frac{a\alpha}{r} \left(\frac{\text{sen.}(4x-m+3)\mu . \text{sen.}\, m\mu}{\text{sen.}\,\mu} + \frac{\text{sen.}(m-1)\mu . \text{sen.}\, m\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{\text{sen.}(4x-2m+4)\mu . \text{sen.}\, 2m\mu}{\text{sen.}\, 2\mu} \right).$$

Ma nel secondo caso, vale a dire quando il serraglio preme più il cuneo laterale che da lui non è premuto, poichè il momento della forza sfiancante del cuneo m^{esimo} è $= (\frac{2q}{r}$. sen. $\mu + \frac{4a}{r^2}$. cos. $(2x - m + 2)\mu$. sen. $(m - 1)\mu) . (\frac{b+G}{r}$. sen. $(2x - 2m + 3)\mu + \frac{\alpha}{r}$. cos. $(2x - 2m + 3)\mu)$, sarà esso uguale alla quantità (I) insieme con $\frac{2q}{r}$. sen. $\mu(\frac{b+G}{r}$. sen. $(2x - 2m + 3)\mu + \frac{\alpha}{r}$. cos. $(2x - 2m + 3)\mu)$, ovvero $= (I) + \frac{2q(b+G)}{r^2}$. sen. μ . sen. $(2x - 2m + 3)\mu + \frac{2q\alpha}{r^2}$. sen. μ . cos. $(2x - 2m + 3)\mu = (I) + \frac{q(b+G)}{r}$. (cos. $(2x - 2m + 2)\mu -$ cos. $(2x - 2m + 4)\mu) + \frac{q\alpha}{r}$. (sen. $(2x - 2m + 4)\mu -$ sen. $(2x - 2m + 2)\mu)$; Ora se si Prop. ant.

dica $\frac{q(b+G)}{r}.(\cos.(2x-2m+2)\mu-\cos.(2x-2m+4)\mu)$

$+\frac{q\alpha}{r}.(\text{sen}.(2x-2m+4)\mu-\text{sen}.(2x-2m+2)\mu)=(L)$,

ficchè il momento della forza sfiancante fia $=(I)+(L)$, è manifesto, che fe alla fomma di un numero m di termini della ferie, che ha (I) per termine generale, fi aggiunga la fomma di un ugual numero di termini di altra ferie, che abbia (L) per termine generale, fi otterrà la fomma de' momenti delle forze sfiancanti nel fecondo cafo per un numero m di cunei. La fomma poi di un numero m di termini della ferie che ha per termine generale (I) s' è già di fopra ritrovata, e l' altra che ha per termine generale (L) è $=$

Prop. 8 Lib. I.

$$\frac{q(b+G)}{r}.\left(\frac{\cos.(2x-m+1)\mu.\,\text{sen}.\,m\mu}{\text{sen}.\,\mu}-\frac{\cos.(2x-m+3)\mu.\,\text{sen}.m\mu}{\text{sen}.\,\mu}\right)$$

$$+\frac{q\alpha}{r}.\left(\frac{\text{sen}.(2x-m+3)\mu.\,\text{sen}.\,m\mu}{\text{sen}.\,\mu}-\frac{\text{sen}.(2x-m+1)\mu.\,\text{sen}.\,m\mu}{\text{sen}.\,\mu}\right);$$

laonde nel fecondo cafo farà la fomma de' momenti delle forze sfiancanti di un numero m di cunei $=\frac{a(b+G)}{r}$.

$$\left(\frac{\cos.(m-1)\mu.\,\text{sen}.\,m\mu}{\text{sen}.\,\mu}-\frac{\cos.(4x-m+3)\mu.\,\text{sen}.\,m\mu}{\text{sen}.\,\mu}-rm+\right.$$

$$\left.\frac{\cos.(4x-2m+4)\mu.\,\text{sen}.\,2m\mu}{\text{sen}.\,2\mu}\right)+\frac{a\alpha}{r}.\left(\frac{\text{sen}.(4x-m+3)\mu.\,\text{sen}.\,m\mu}{\text{sen}.\,\mu}\right.$$

$$\left.+\frac{\text{sen}.(m-1)\mu.\,\text{sen}.\,m\mu}{\text{sen}.\,\mu}-\frac{\text{sen}.(4x-2m+4)\mu.\,\text{sen}.\,2m\mu}{\text{sen}.\,2\mu}\right)+$$

$$\frac{q(b+G)}{r}.\left(\frac{\cos.(2x-m+1)\mu.\,\text{sen}.\,m\mu}{\text{sen}.\,\mu}-\frac{\cos.(2x-m+3)\mu.\,\text{sen}.\,m\mu}{\text{sen}.\,\mu}\right)$$

$$+\frac{q\alpha'}{r}.\left(\frac{\text{sen}.(2x-m+3)\mu.\,\text{sen}.\,m\mu}{\text{sen}.\,\mu}-\frac{\text{sen}.(2x-m+1)\mu.\,\text{sen}.\,m\mu}{\text{sen}.\,\mu}\right);$$

il che ecc.

S C O L I O.

Avvertafi che quefta fomma de' momenti vale folo nella fuppofizione che la retta MD *incontri il centro di gravità del ferraglio;*

altrimenti farà d' uopo trovare prima il momento della forza sfiancante come nello Scolio dell' antecedente proposizione, poi come in questa la somma de' momenti.

COROLLARIO.

Quindi fatto $m = x + 1$, si troverà nel primo e terzo caso la somma de' momenti delle forze sfiancanti de' cunei fino alla mossa inclusivamente

$$= \frac{a(b+G)}{r} \cdot \Big(\frac{\cos. x\mu . \text{sen.}(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{\cos.(3x+2)\mu . \text{sen.}(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - r(x+1) + \frac{\cos.(2x+2)\mu . \text{sen.}(2x+2)\mu}{\text{sen.}\,2\mu} \Big)$$

$$+ \frac{ae}{r} \cdot \Big(\frac{\text{sen.}(3x+2)\mu . \text{sen.}(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} + \frac{\text{sen.}\,x\mu . \text{sen.}(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{\text{sen}^2.(2x+2)\mu}{\text{sen.}\,2\mu} \Big) = \frac{a(b+G)}{r} \cdot \Big(\frac{r . \text{sen.}(2x+1)\mu}{2 . \text{sen.}\,\mu} + \frac{r . \text{sen.}\,\mu}{2 . \text{sen.}\,\mu}$$ Prop. 7 Lib. I

$$- \frac{r . \text{sen}(4x+3)\mu}{2 . \text{sen.}\,\mu} + \frac{r . \text{sen.}(2x+1)\mu}{2 . \text{sen.}\,\mu} - r(x+1) + \frac{r . \text{sen.}(4x+4)\mu}{2 . \text{sen.}\,2\mu} \Big)$$

$$+ \frac{ae}{r} \cdot \Big(\frac{r . \cos.(2x+1)\mu}{2 . \text{sen.}\,\mu} - \frac{r . \cos.(4x+3)\mu}{2 . \text{sen.}\,\mu} + \frac{r . \cos.\,\mu}{2 . \text{sen.}\,\mu} - \frac{r . \cos.(2x+1)\mu}{2 . \text{sen.}\,\mu} - \frac{r^2}{2 . \text{sen.}\,2\mu} + \frac{r . \cos.(4x+4)\mu}{2 . \text{sen.}\,2\mu} \Big);$$

che ridotta diventerà

$$= \frac{a(b+G)}{r} \cdot \Big(\frac{r . \text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{r}{2}(2x+1) - \frac{r . \text{sen.}(4x+2)\mu}{2 . \text{sen.}\,2\mu} \Big) + \frac{ae}{r} \Big(\frac{r . \cos.\,\mu}{2 . \text{sen.}\,\mu} - \frac{\cos^2.(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,2\mu} \Big).$$

Ma nel secondo caso sarà la somma de' momenti delle forze sfiancanti de' cunei fino alla mossa uguale alla quantità suddetta insieme con

$$\frac{q(b+G)}{r} \cdot \Big(\frac{\cos. x\mu . \text{sen.}(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{\cos.(x+2)\mu . \text{sen.}(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} \Big) + \frac{qe}{r} \cdot \Big(\frac{\text{sen.}(x+2)\mu . \text{sen.}(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{\text{sen.}\,x\mu . \text{sen.}(x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} \Big),$$

ovvero insieme con $\frac{q(b+G)}{r}$.

$$\left(\frac{r \cdot \text{sen.}\,(2x+1)\mu}{2 \cdot \text{sen.}\,\mu} + \frac{r \cdot \text{sen.}\,\mu}{2 \cdot \text{sen.}\,\mu} - \frac{r \cdot \text{sen.}(2x+3)\mu}{2 \cdot \text{sen.}\,\mu} + \frac{r \cdot \text{sen.}\,\mu}{2 \cdot \text{sen.}\,\mu}\right)$$

$$+ \frac{q\alpha}{r} \cdot \left(\frac{r \cdot \text{cos.}\,\mu}{2 \cdot \text{sen.}\,\mu} - \frac{r \cdot \text{cos.}\,(2x+3)\mu}{2 \cdot \text{sen.}\,\mu} - \frac{r \cdot \text{cos.}\,\mu}{2 \cdot \text{sen.}\,\mu} + \frac{r \cdot \text{cos.}\,(2x+1)\mu}{2 \cdot \text{sen.}\,\mu}\right)$$, o ancora con $\frac{q(b+G)}{r} \cdot (r - \text{cos.}\,(2x+2)\mu)$

$+ \frac{q\alpha}{r} \cdot \text{sen.}\,(2x+2)\mu$; e per conſeguenza ſarà nel caſo medeſimo la ſopraccennata ſomma de' momenti $= \frac{a(b+G)}{r}$.

$$\left(\frac{r \cdot \text{sen.}\,(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu} - \frac{r}{2}(2x+1) - \frac{r \cdot \text{sen.}\,(4x+2)\mu}{2 \cdot \text{sen.}\,2\mu}\right) + \frac{a\alpha}{r} \cdot$$

$$\left(\frac{r \cdot \text{cos.}\,\mu}{2 \cdot \text{sen.}\,\mu} - \frac{\text{cos}^2.\,(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}\right) + \frac{q(b+G)}{r}(r - \text{cos.}\,(2x+2)\mu)$$

$$+ \frac{q\alpha}{r} \cdot \text{sen.}\,(2x+2)\mu.$$

PROBLEMA 20. PROPOSIZIONE 20.

In un Arco a feſto acuto formato di quanti cunei ſi vogliano, trovare la ſomma de' momenti delle forze che tendono a roveſciare i pilaſtri dopo diſarmate le centine.

Fig. VIII. Tav. III. Sia l' Arco a feſto acuto *ABC* formato da due moſſe, dal ſerraglio, e da un numero *x* di cunei per parte: biſogna determinare la ſomma de' momenti delle forze che cercano roveſciare uno de' pilaſtri come *AW* d' intorno al punto eſtremo *W* della ſua baſe.

Pertanto o il ſerraglio preme il cuneo laterale dalla parte *AW* quanto da eſſo è premuto, o lo preme di più, o finalmente lo preme meno. Nel primo caſo poichè la ſomma de' momenti delle forze sfiancanti è $= \frac{a(b+G)}{r} \cdot \left(\frac{r \cdot \text{sen.}\,(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,\mu}\right.$ Corol. Prop. ant.

$-\frac{r}{2}(2x+1)-\frac{r.\text{sen.}(4x+2)\mu}{2.\text{sen.}\,2\mu})+\frac{ae}{r}(\frac{r.\cos.\mu}{2.\text{sen.}\mu}-\frac{\cos^2.(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,2\mu})$ egli è manifesto che se da questa quantità si sottragga il momento della spinta relativa della mossa, la quale sostiene il pilastro, si conseguirà nella differenza la somma de' momenti che operano contro il pilastro medesimo. Sia dunque il punto q centro di gravità della mossa, da cui si conduca la verticale qn, e si chiami Δ la retta $Qr = Qt$; laonde, essendo il raggio interiore $QA = b$, e la grossezza Ad del pilastro $= G$, sarà $Wn = dr = b + G - \Delta$. La spinta poi relativa della mossa è $= \frac{a.\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu}$, dunque il suo momento sarà $= (b + G - \Delta).\frac{a.\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu} = a(b+G).\frac{\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu} - a\Delta.\frac{\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu}$; conseguentemente, sottratta questa quantità dalla prima, si troverà la ricercata somma de' momenti contro al pilastro $= a\Delta.\frac{\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu} - \frac{a(b+G)}{r}(\frac{r}{2}(2x+1)+\frac{r.\text{sen.}(4x+2)\mu}{2.\text{sen.}\,2\mu})+\frac{ae}{r}(\frac{r.\cos.\mu}{2.\text{sen.}\mu}-\frac{\cos^2.(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,2\mu})$. Cor. 1 Prop. 13 di questo

Ma pel secondo caso in cui il ferraglio preme il cuneo laterale più che da esso non è premuto, poichè la spinta relativa della mossa è $= q + \frac{a.\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu}$, sarà il suo momento $= (b+G-\Delta).(q+\frac{a.\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu}) = q(b+G) + a(b+G).\frac{\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu} - \Delta(q + \frac{a.\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu})$; laddove la somma de' momenti delle forze sfiancanti riesce nel caso suddetto $= \frac{a(b+G)}{r}(\frac{r.\text{sen.}(2x+1)\mu}{\text{sen.}\mu}-\frac{r}{2}(2x+1)-\frac{r.\text{sen.}(4x+2)\mu}{2.\text{sen.}\,2\mu}) + \frac{ae}{r}(\frac{r.\cos.\mu}{2.\text{sen.}\mu}-\frac{\cos^2.(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}) + \frac{q(b+G)}{r}.(r-\cos.(2x$ Luog. cit. Corol. Prop. ant.

$+2)\mu) + \frac{q\alpha}{r} . \text{sen.} (2x+2)\mu$; e però tolto da questa quantità il momento della spinta relativa della mossa, resteranno contro al pilastro stesso *AW* i momenti $\Delta(q + \frac{a . \text{sen.} (2x+1)\mu}{\text{sen.} \mu}) - \frac{a(b+G)}{r}$. $(\frac{r}{2}(2x+1) + \frac{r . \text{sen.} (4x+2)\mu}{2 . \text{sen.} 2\mu}) + \frac{a\alpha}{r}(\frac{r . \cos. \mu}{2 . \text{sen.} \mu} - \frac{\cos^2. (2x+1)\mu}{\text{sen.} 2\mu}) - \frac{q(b+G)}{r} . \cos. (2x+2)\mu + \frac{q\alpha}{r} . \text{sen.} (2x+2)\mu$.

Sia finalmente la pressione del serraglio sul cuneo laterale minore della pressione del cuneo contro di esso. In questo terzo caso tutto procede secondo l' ordine del primo, con questa sola differenza, ch' essendosi provato, che nel caso ter-
Prop. 13 di questo zo vi sono due forze *Dk Di* uguali all' eccesso delle pressioni de' cunei laterali al serraglio sulla pressione del serraglio, le quali spingono questo all' insù, ch' è quanto dire essere il serraglio spinto all' insù colla loro forza composta *Dl*, che nel primo caso non v' è, fa d' uopo tener conto ancora di essa forza. E perchè viene la forza *Dl* sostenuta dalle due sopraccentine a destra e a sinistra, vi sarà altra ed altra forza, da cui saranno premute; e però bisogna ritrovare il momento di quella che preme la sopraccentina dalla parte del pilastro *AW*, e aggiungerlo alla quantità somministrata dal caso primo, per avere tutti i momenti delle forze che dalla parte medesima cercano rovesciare il pilastro *AW*.

Fig. IX. Tav. III. Ora si passi alla Figura nona per non confondere l' ottava, e dal centro di gravità *D* del serraglio si tirino due linee perpendicolari alle sopraccentine, vale a dire dirette a' centri de' due Archi minori, che l' Arco composto comprendono: è manifesto che se si formi su di esse un parallelogrammo *Dulf*, che abbia *Dl* per diagonale, si conseguirà nella linea *Du* la forza sopraddetta; e quindi moltiplicandola per la perpendicolare condotta dal centro del moto sulla direzione *QD*, sarà dato il momento da aggiugnersi. E poichè l' angolo $BQA = (2x+2)\mu$, la $QB = b$, la $Bm = \frac{b}{r} . \text{sen.} (2x +$

$2)\mu$, la $Qm = \frac{b}{r} . \cos. (2x + 2)\mu$, e in oltre la $Qt = \Delta$, sarà la $Bt = \Delta - b$; come poi la Bm alla BQ, così è la Bt alla BD, dunque $BD = \frac{r . (\Delta - b)}{\text{sen.} (2x + 2)\mu}$; e però tutta la $Dm = \frac{r . (\Delta - b)}{\text{sen.} (2x + 2)\mu} + \frac{b}{r} . \text{sen.} (2x + 2)\mu = \frac{r^2\Delta - b . \cos^2. (2x + 2)\mu}{r . \text{sen.} (2x + 2)\mu}$; per conseguenza nel triangolo rettangolo DmQ essendo dati i cateti Dm Qm sarà data anche l' ipotenusa DQ. Per facilità di calcolo si faccia la $DQ = z$, la $Dm = y$, e le Dk Di restino come nella Prop. 13 di questo uguali a q. E perchè l' angolo IDB o BDK ovvero kDl è uguale all' angolo BQm, sarà come BQ a Qm così la Dk alla metà della Dl, ma sono date le BQ Qm Dk, dunque $Dl = \frac{2q}{r} . \cos. (2x + 2)\mu$: in oltre essendo come la linea Dm alla DQ così la metà della Dl alla Du, s' avrà la forza $Du = \frac{zq}{yr} . \cos. (2x + 2)\mu$, e così sarà determinata la forza superiore che preme la sopraccentina. Laonde ripassando alla Figura ottava si cerchi la perpendicolare condotta dal centro W del moto sulla linea che unisce i punti D Q, e si troverà $= \frac{y}{z} (b + G) + \frac{ab}{zr} . \cos. (2x + 2)\mu$; Fig. VIII. Tav. III.

e però il momento di essa forza sarà $= \frac{q}{r} (b + G) . \cos. (2x + 2)\mu + \frac{abq}{yr^2} . \cos^2. (2x + 2)\mu$; ma è $y = \frac{r^2\Delta - b . \cos^2. (2x + 2)\mu}{r . \text{sen.} (2x + 2)\mu}$; conseguentemente il momento medesimo sarà $= \frac{q}{r} (b + G) . \cos. (2x + 2)\mu + \frac{abq . \text{sen.} (2x + 2)\mu . \cos^2. (2x + 2)\mu}{r^2\Delta - br . \cos^2. (2x + 2)\mu}$; quindi la somma de' momenti che cercano rovesciare il pilastro AW sarà nel terzo caso $= \frac{a\Delta . \text{sen.} (2x + 1)\mu}{\text{sen.} \mu} - \frac{a(b + G)}{r} . (\frac{r}{2} (2x$

$$+1).\ +\frac{r.\,\text{sen.}\,(4x+2)\mu}{2.\,\text{sen.}\,2\mu}\Big)+\frac{az}{r}.\Big(\frac{r.\,\text{cos.}\,\mu}{2.\,\text{sen.}\,\mu}-\frac{\text{cos}^2.\,(2x+1)\mu}{\text{sen.}\,2\mu}\Big)$$

$$+\frac{q(b+G)}{r}.\,\text{cos.}\,(2x+2)\mu+\frac{abq.\,\text{sen.}\,(2x+2)\mu.\,\text{cos}^2.\,(2x+2)\mu}{r^2\Delta-br.\,\text{cos}^2.\,(2x+2)\mu};$$

e così sarà risoluto il Problema in tutti i suoi casi.

Per ajuto della memoria si ripeterà, che in tutte e tre le formole, derivanti da' tre casi considerati nella proposizione, b dinota il raggio interiore di una e dell' altra parte dell' Arco composto, 2μ l' angolo al centro di un cuneo, $x+1$ il numero de' cunei da ciascuna parte, a il peso di un cuneo che può esprimersi anche per $\frac{(c^2-b^2)\mu}{r}$ quando si faccia il raggio esteriore $=c$, G la grossezza del pilastro, z la sua altezza, ma Δ è uguale alla Qt; ovvero essendo la distanza QM dal punto Q al centro di gravità di un cuneo $=$

Corol. 2 Prop. 9 Lib. I. $\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)}.\frac{\text{sen.}\,\mu}{\mu}$, e l' angolo $MQt=\mu$, sarà la Qt cioè la $\Delta=\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)}.\frac{\text{sen.}\,\mu.\,\text{cos.}\,\mu}{r\mu}$. Vi ha solo questa differenza ne' tre casi suddetti, che chiamata p la pressione del serraglio sopra un cuneo laterale, e diventando quella del cuneo sul serraglio $=\frac{a.\,\text{sen.}\,2x\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$, si ha nel primo caso $p=\frac{a.\,\text{sen.}\,2x\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$; ma nel secondo $p>\frac{a.\,\text{sen.}\,2x\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$ e $p-\frac{a.\,\text{sen.}\,2x\mu}{\text{sen.}\,2\mu}=q$; così nel terzo caso riesce $p<\frac{a.\,\text{sen.}\,2x\mu}{\text{sen.}\,2\mu}$ e $\frac{a.\,\text{sen.}\,2x\mu}{\text{sen.}\,2\mu}-p=q$.

COROLLARIO.

Si supponga infinito il numero de' cunei componenti una e l' altra parte dell' Arco composto. Sarà nel primo caso la somma de' momenti delle forze contro al pilastro $=a\Delta.$

sen. $2x\mu$

$\frac{\text{sen. } 2x\mu}{\mu} - \frac{a(b+G)}{r} \cdot \left(rx + \frac{r \cdot \text{sen. } 4x\mu}{4\mu}\right) + \frac{aa}{r}\left(\frac{r^2}{2\mu} - \frac{\cos^2 . 2x\mu}{2\mu}\right)$.

Ora si dica la saetta Bm dell' Arco $= b$, e la semicorda $Am = c$: e perchè nel triangolo rettangolo BQm la $BQ = b$, e l' angolo $BQA = (2x + 2)\mu$, che in questa ipotesi si fa $= 2x\mu$ come l' arco $AB = \frac{2bx\mu}{r}$, sarà la $Bm = \frac{b}{r} \cdot \text{sen.} 2x\mu$, e la $Qm = \frac{b}{r} \cdot \cos. 2x\mu$; e però la rimanente $Am = b - \frac{b}{r} \cdot \cos. 2x\mu$; laonde $\frac{b}{r} \cdot \text{sen. } 2x\mu = b$, e $b - \frac{b}{r} \cdot \cos. 2x\mu = c$; quindi $\text{sen.} 2x\mu = \frac{br}{b}$, $x = \frac{r.AB}{2b\mu}$, e $\cos. 2x\mu = \frac{(b-c)r}{b}$. E poichè $r.\text{sen. } 4x\mu = 2.\text{sen.} 2x\mu . \cos. 2x\mu$, sarà $r.\text{sen.} 4x\mu = \frac{2br}{b} \cdot \frac{(b-c)r}{b} = \frac{2br^2(b-c)}{b^2}$; parimenti si troverà $r^2 - \cos^2 . 2x\mu = \text{sen}^2 . 2x\mu = \frac{b^2r^2}{b^2}$. Sicchè sostituendo questi valori, e $\frac{(c^2-b^2)\mu}{r}$ in luogo di a, e $\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)}$ in luogo di Δ, sarà la somma de' momenti $= (c^2 - b^2) \cdot \left(\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)} \cdot \frac{b}{b} - \frac{b+G}{2b^2} \cdot \left(b . AB + b(b-c)\right) + \frac{ab^2}{2b^2}\right)$; e in questo caso sarà $p = \frac{a . \text{sen. } 2x\mu}{\text{sen. } 2\mu} = \frac{(c^2-b^2)\mu}{2r\mu} \cdot \frac{br}{b} = \frac{(c^2-b^2)b}{2b}$.

Ma quando accada il secondo caso e sia $p - \frac{a.\text{sen. } 2x\mu}{\text{sen. } 2\mu} = q$, ovvero $q = p - \frac{(c^2-b^2)b}{2b}$, riuscirà, sostituendo, la somma de' momenti contro al pilastro $= \frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b+c)} \cdot q + (c^2 - b^2)$. $\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b+c)} \cdot \frac{b}{b} - \frac{b+G}{2b^2} \cdot \left(b . AB + b(b-c) + \frac{ab^2}{2b^2}\right)\right)$

$- \frac{q.(b+G).(b-e)}{b} + \frac{\text{æ}qb}{b}$: Per ultimo se si verificasse il terzo caso e fosse $\frac{a.\text{sen. } 2x\mu}{\text{sen. } 2\mu} - p = q$, o $q = \frac{(c^2 - b^2)b}{2b} - p$ sarà la somma di essi momenti nella supposizione de' cunei infinitesimi $= (c^2 - b^2).\Big(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b+c)}.\frac{b}{b} - \frac{b+G}{2b^2}.\Big(b.AB + b(b-e) + \frac{\text{æ}b^2}{2b^2}\Big) + \frac{q.(b+G).(b-e)}{b} + \Big(\text{æ}bq.\frac{br}{b}.\frac{(b-e)^2r^2}{b^2}\Big)$: $\Big(\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)}.r^3 - br.\frac{(b-e)^2.r^2}{b^2}\Big) = (c^2 - b^2).\Big(\frac{2c^2+2bc+2b^2}{3(b+c)}.\frac{b}{b} - \frac{b+G}{2b^2}.\Big(b.AB + b(b-e) + \frac{\text{æ}b^2}{2b^2}\Big) + \frac{q(b+G).(b-e)}{b} + \Big(\text{æ}qb.(b-e)^2\Big) : \Big(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b+c)}.b^2 - b.(b-e)^2\Big)$.

L E M M A.

Se φ sia un angolo qualsivoglia, non però maggiore del quadrante, e si prenda la formola $\frac{\varphi.\cos.\varphi}{r.\text{sen.}\varphi}$; dico che quanto più piccolo è l' angolo φ, tanto si fa maggiore il valore della formola medesima.

Sia π un altro angolo minore di φ: dico che $\frac{\pi.\cos.\pi}{r.\text{sen.}\pi}$ è maggiore di $\frac{\varphi.\cos.\varphi}{r.\text{sen.}\varphi}$.

E poichè l' angolo minore al maggiore ha maggior ragione della tangente dell' angolo minore alla tangente dell' angolo maggiore, avrà $\pi : \varphi > \text{tan.}\pi : \text{tan.}\varphi$; e però $\frac{\pi}{\text{tan.}\pi} > \frac{\varphi}{\text{tan.}\varphi}$; e $\frac{r\pi}{r.\text{tan.}\pi} > \frac{r\varphi}{r.\text{tan.}\varphi}$: ma $\frac{r}{\text{tan.}\pi} = \frac{\cos.\pi}{\text{sen.}\pi}$, e $\frac{r}{\text{tan.}\varphi}$

$= \frac{\cos.\varphi}{\mathrm{sen}.\varphi}$; dunque ſarà ancora $\frac{\pi.\cos.\pi}{r.\mathrm{sen}.\pi} > \frac{\varphi.\cos.\varphi}{r.\mathrm{sen}.\varphi}$; il che ecc.

TEOREMA. PROPOSIZIONE 21.

In un Arco intero, quanto maggiore è il numero de' cunei ne' quali è l' Arco diviſo, tutte l' altre coſe pari, tanto maggiore ſarà la ſomma de' momenti contro a' pilaſtri.

Si faccia il raggio interiore $= b$, l' eſteriore $= c$, l' altezza del pilaſtro $= \alpha$, la ſua groſſezza $= G$, 2μ l' angolo al centro di un cuneo, e ſia il quadrante $AZ = Q$: per le coſe dimoſtrate ſarà la ſomma de' momenti contro a' pilaſtri $= (c^2 - b^2).\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b+c)}.\frac{\cos.\mu}{r} + \frac{\alpha\mu.\cos.\mu}{2r.\mathrm{sen}.\mu} - \frac{(G+b)Q}{2b}\right) = \frac{(2c^2 + 2bc + 2b^2).(c^2 - b^2)}{3(b+c)}.\frac{\cos.\mu}{r} + \frac{\alpha(c^2 - b^2)}{2}.\frac{\mu.\cos.\mu}{r.\mathrm{sen}.\mu} - \frac{(c^2 - b^2).(G+b)Q}{2b}$. Ora di queſto trinomio l' ultimo termine è ſempre lo ſteſſo qualunque ſia l' angolo 2μ, ovvero qualunque ſia il numero de' cunei che l' Arco a tutto ſeſto coſtituiſcono; ma il ſecondo termine all' incontro ſi fa pel lemma antecedente tanto più grande quant' è minore l' angolo μ; e ſimilmente il primo perchè tanto più creſce il valore di $\frac{\cos.\mu}{r}$ quanto minore è μ. I due primi termini ſono poi uniti col ſegno poſitivo, e il ſolo terzo è del ſegno negativo affetto; dunque la ſomma de' momenti contro a' pilaſtri creſce tanto più quanto minore è l' angolo μ o il ſuo doppio 2μ, cioè l' angolo al centro de' cunei: ma quando gli angoli al centro de' cunei ſono minori, in un maggior numero di cunei vien l' Arco intero diviſo; laonde finalmente quanto maggiore è il numero de' cunei, tutte l' altre coſe pari, tanto maggiore ſarà la ſomma de' momenti contro a' pilaſtri; il che ecc.

Fig. XIII. Tav. II.

Prop. 17 di queſto

COROLLARIO.

Dunque quando l' Arco intero è diviso in un numero infinito di cunei massima è la somma de' momenti contro a' pilastri.

SCOLIO.

Questo Teorema merita per la sua novità qualche osservazione. Io ne aveva dubbio molto prima di scuoprir l' ordine con cui procedono le cose negli Archi circolari. Quando l' Arco intero, diceva, è composto di un solo pezzo e senza centina, i pilastri non soffrono alcuna forza che tenda a rovesciarli, ma anzi sono dal peso dell' Arco rattenuti; all' incontro se il si divida in cunei, vengono essi da questo peso sollecitati; la natura poi non procede per isbalzi ma ordinatamente; dunque il numero de' cunei in cui è l' Arco diviso dee entrare come elemento nel calcolo de' momenti delle spinte contro a' pilastri, e una maggior o minor divisione debbe far variare la quantità de' momenti medesimi. Questa riflessione, che pure non è che una ragionevole riflessione, non una dimostrazione, l' abbiamo verificata ne' calcoli di questo Libro. Potrebbe però alcuno dubitare, che, posto vero l' enunciato Teorema, diventi la somma de' momenti contro a' pilastri infinita, quando infinito sia il numero de' cunei che compongono l' Arco intero, ma non è così, e si è dimostrato esser tale la natura della formola esprimente essa somma de' momenti, che nel caso che sia 2μ *infinitesimo e infinito il numero de' cunei, si riduce necessariamente uguale alla quantità finita* $(c^2 - b^2)$.

Corol. 1. Prop. 17 di questo $$\left(\frac{2c^3 + 2bc + 2b^2}{3(b+c)} + \frac{a}{2} - \frac{(G+b)Q}{2b}\right).$$

Fine del Libro terzo.

LIBRO QUARTO

DELLA PRESSIONE DE' CUNEI SULLA CENTINA, E DE' PUNTI D' EQUILIBRIO IN UN ARCO DOTATO DI QUALSIVOGLIA CURVATURA.

PROBLEMA I. PROPOSIZIONE I.

DAta in un Arco di qualſivoglia curvatura, e di uniforme groſſezza, l' equazione alla curva interiore, ritrovare quella alla curva eſteriore.

Sia data nell' Arco *BQTSAO* l'equazione alla curva interiore *OAS*: ſi ricerca l' equazione alla curva eſteriore *BQT* dell' Arco ſteſſo, ſuppoſta uniforme la groſſezza dell' Arco. Fig. I. Tav. IV.

Sia *AM* la ſaetta dell' Arco, e ſi ordini qualunque retta *ND* ad eſſa perpendicolare, poi ſi faccia l' aſciſſa *AN* della curva interiore $= x$, l'ordinata $ND = y$; e condotta dal punto *D* la *DH* perpendicolare alla curva *AD*, ſi chiami la groſſezza uniforme *DH* dell' Arco $= g$. Si tiri dipoi la *CL* infinitamente proſſima a *ND*, la *RDE* parallela ad *AM*, e la *HRF* parallela a *ND*; indi ſi dica l' aſciſſa *AF* della curva eſteriore $= z$, e l' ordinata $FH = u$; ſarà certamente la $NL = DE = dx$, la $CE = dy$, l' archetto $DC = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, e ſia anche per brevità di calcolo $= ds$; finalmente ſi prolunghi la *HD* finchè incontri la *AM* in *I*.

E poichè il triangolo *CDE* è ſimile al triangolo *DNI*, e il triangolo *DNI* all' altro *DHR*, ſarà il triangolo *CDE* ſimile al triangolo *DHR*; e perciò come $CD:CE::HD:DR$, ovvero $ds:dy::g:DR = \frac{gdy}{ds} = FN$; quindi la $AF = AN - FN$ darà l' equazione prima (I) $z = x - \frac{gdy}{ds}$. Di nuovo per la ſteſſa

similitudine de' triangoli *CDE HDR* come $CD:DE::DH:HR$, o $ds:dx::g:\frac{gdx}{ds}=HR$; ma $FH=FR+RH$, dunque s'avrà questa seconda equazione $(II)\ u=y+\frac{gdx}{ds}$. Data pertanto l'equazione alla curva interiore *OAS* (sia essa algebraica o trascendente) sarà data ancora la relazione tra $x\ y$ o tra le loro flussioni; onde si potranno determinare per $x\ y$ i valori di $\frac{gdy}{ds}$ e $\frac{gdx}{ds}$, poi sostituirli nell'equazioni (I) e (II), e così conseguire due nuove equazioni: ma è data altresì come abbiamo detto la relazione tra x e y; date dunque tre equazioni per quattro incognite $x\ y\ u\ z$ si debbe cercare di eliminare a forza di calcolo le due $x\ y$ per restare con un' equazione ove vi sieno solamente le due $u\ z$, che sarà l' equazione alla curva esteriore *BQT*; il che ecc.

Corollario.

Sia proposto per esempio di ritrovare la curva esteriore *BQT* di un Arco circolare o di un Arco, del quale la curvatura interiore *OAS* sia circonferenza di cerchio del raggio $ID=a$. Essendo dunque $y=\sqrt{(2ax-x^2)}$, sarà $dy=\frac{dx(a-x)}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$, $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{\left(dx^2+\frac{dx^2(a-x)^2}{2ax-x^2}\right)}=\frac{adx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$; e però $\frac{gdy}{ds}=\frac{gdx(a-x)}{\sqrt{(2ax-x^2)}}:\frac{adx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}=\frac{g(a-x)}{a}$, e $\frac{gdx}{ds}=gdx:\frac{adx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}=\frac{g}{a}\sqrt{(2ax-x^2)}$; laonde l' equazioni (I) e (II) si cangieranno in queste due altre $(III)\ z=x-\frac{g(a-x)}{a}$, $(IV)\ u=y+\frac{g}{a}\sqrt{(2ax-x^2)}$. Dall' equazione (III) si ricava $z=\frac{ax-ag+gx}{a}$, e $x=\frac{a(z+g)}{a+g}$; e però $2a-x=2a-$

$\frac{az+ag}{a+g} = \frac{2a^2+ag-az}{a+g} = \frac{a}{a+g}.(2a+g-z)$; onde $2ax-x^2$ $= x(2a-x) = \frac{a}{a+g}(z+g).\frac{a}{a+g}.(2a+g-z) = \frac{a^2}{(a+g)^2}.$ $(2az+gz-z^2+2ag+g^2-gz) = \frac{a^2}{(a+g)^2}.(2az-z^2+$ $2ag+g^2)$. In oltre per l' equazione (*IV*), fostituendo in luogo di y la quantità equivalente $\sqrt{(2ax-x^2)}$, s' avrà u $= \sqrt{(2ax-x^2)} + \frac{g}{a}\sqrt{(2ax-x^2)} = \frac{a+g}{a}\sqrt{(2ax-x^2)}$; e quadrando farà $u^2 = \frac{(a+g)^2}{a^2}(2ax-x^2)$: ma s' è fuperiormente dimoftrato che $2ax-x^2 = \frac{a^2}{(a+g)^2}.(2az-z^2+2ag$ $+g^2)$, dunque $u^2 = \frac{(a+g)^2}{a^2}.\frac{a^2}{(a+g)^2}.(2az-z^2+2ag+g^2)$ $= 2az-z^2+2ag+g^2$, e trafportando, $u^2-2az+z^2 = 2ag$ $+g^2$, ch'è un'equazione data folamente per l' incognite u z, o per le coordinate della curva efteriore *BQT*. Perchè poi aggiugnendo a^2 nell' uno e nell' altro membro dell' equazione fi ha $u^2+a^2-2az+z^2 = a^2+2ag+g^2$, farà $u^2+(a-z)^2 = (a+g^2)$; per la qual cofa fatta $AQ=g$, farà $IQ=a$ $+g$, la FI poi è $=IA-AF=a-z$, e $FH=u$; laonde farà $(FH)^2+(FI)^2=(IQ)^2$; ma $(FH)^2+(FI)^2$ è ancora uguale a $(IH)^2$, e però $(IH)^2=(IQ)^2$, e $IH=IQ$; e così fempre fi proverà; per confeguenza la curva efteriore *BQT* farà la circonferenza del cerchio, che ha *IQ* per raggio, e lo fteffo centro *I* della circonferenza interiore; come è anche noto per la Geometria.

S C O L I O.

Da queſto ſemplice eſempio e da altri, che può ognuno a piacimento proporſi, appariſce la difficoltà di eliminare le incognite x y *per avere un' equazione in cui vi reſtino le due ſole* u z. *Alle volte rieſce il calcolo così implicato, che non è poſſibile di condurlo*

a terminè, e richiede sempre somma fatica e industria nel calcolatore. Tuttavolta questa difficoltà non apporta alcun discapito alle Teorie che siamo per presentare, perchè si farà sempre uso della curva interiore dell' Arco, non mai dell' esteriore. Per formarsi poi una qualche idea di essa curva esteriore relativamente all' interiore, basterà avvertire che si l' una che l' altra nascono dalla medesima evoluta, e che i di loro raggi osculatori differiscono sempre di una retta costante, ch' è appunto la grossezza dell' Arco.

PROBLEMA 2. PROPOSIZIONE 2.

Se fra i pilastri di un Arco dotato di qualsivoglia curvatura interiore e di uniforme grossezza, sia messa la centina, poi su di essa s' intendano collocati i cunei da una parte fino a qual punto si voglia; determinare la pressione di uno qualunque de' cunei sulla centina, supposti però i cunei infinitesimi di grandezza.

Fig. II. Tav. IV. Tra i pilastri di un Arco sia posta la centina *ABΩ* di qualsivoglia incurvamento, poi s' intendano collocati sulla centina da una parte i cunei infinitesimi di uniforme grossezza fino in *B*; bisogna ritrovare la pressione del cuneo *opzn* su di essa.

Si supponga divisa la parte riempiuta dell' Arco ne' suoi cunei infinitesimi sopra le basi uguali *BC CD DE EL* ecc...., e i primi quattro superiori sieno quelli sulle basi *BC CD DE EL*, e alla curva *Bz* si tirino dai punti *B C D E L* ecc..... *n z* i raggi osculatori. E perchè i quattro archetti contigui *BC CD DE EL* sono infinitesimi, converranno i raggi osculatori *BW CW DW EW LW* nello stesso punto W; ma i raggi osculatori *nÆ zÆ* condotti dalle estremità *n z* della base del cuneo *opzn* concorrano insieme nel punto *Æ*.

Si prendano pertanto i centri di gravità *G H I K* ecc.... *q* de' cunei, si congiungano le rette *GH HI IK* ecc., e si conducano le verticali *GO HS IZ Kb* ecc..... *qu* proporzionali alle rispettive gravità de' cunei, poi si compia il parallelogrammo

rallelogrammo *GMON*: esprimerà *GN* la pressione del primo cuneo superiore sulla centina, e *GM* la sua spinta relativa sul secondo. Quindi fatta *HP* uguale e per diritto a *GM* si terminino i parallelogrammi *HPTS HVTX*, e dinoterà *HX* la pressione del secondo cuneo sulla centina, come *HV* la spinta relativa sul terzo cuneo. Similmente presa *IY* uguale e per diritto alla *HV* e compiuti i parallelogrammi *IYaZ Ibad*, verrà dalla *Id* espressa la pressione del terzo cuneo sulla centina, e dalla *Ib* la spinta relativa sul quarto. E conducendo di nuovo alle basi de' susseguenti cunei i raggi osculatori, e così continuando ad operare fino al cuneo *opzn* si perverrà a conseguire la sua pressione sulla centina. Prop. 10 Lib. I. Corol 1 Prop. cit.

Sia però *qr* la spinta relativa del cuneo immediate superiore a *opzn* su di esso, e tirata *qy* perpendicolare alla commessura inferiore *pz*, si compiano i due nuovi parallelogrammi *qrku qykt* per ritrovare la pressione *qt* di *opzn* sulla centina: e si avverta che siccome le direzioni *GM HV Ib* ecc. delle spinte relative sono respettivamente perpendicolari alle commessure superiori de' cunei premuti, così anche la direzione *lqr* della spinta relativa del cuneo superiormente contiguo a *opzn* dee essere necessariamente perpendicolare alla commessura *on*.

Ora dai punti *P Y* ecc..... *r* si conducano le linee *Pg Vf* ecc. ....*rs* parallele alle *HI IK* ecc......*qy* finchè incontrino le linee rette *WH WI* ecc........ *Æq* ne' punti *f g* ecc. ......*s*, e si compiano ancora i parallelogrammi *HQSR IcZe* ecc. *qεuφ*: esprimeranno le *HR Ie* ecc....... *qφ* le pressioni che sarebbero esercitate da' respettivi cunei sulla centina se non avessero il gravamento de' superiori, e se ciascuno di essi fosse il primo in ordine; così le *HQ Ic* ecc..... *qε* le pressioni che senza il suddetto gravamento eserciterebbero su' cunei immediate inferiori. Ed essendo sì li due angoli *PHI IHG*, che li due *IHG DWC* uguali a due retti, saranno gli angoli *PHI IHG* uguali agli angoli *IHG DWC*; e tolto il comune *IHG*, resterà l' angolo *PHI*, ovvero *HPg*, uguale all' angolo *DWC*: in simil guisa si proverà l' angolo *IYf* uguale all' angolo *EWD*, e così in progresso fino all' angolo *qrs* che sarà uguale all' angolo *zÆn*. Di nuovo l' angolo *IHW* è uguale all' angolo *GHW*; ma perchè l' angolo *IHW* è uguale all' in-

T

teriore *PgH*, e l' angolo *GHW* all' opposto al vertice *PHg*, sarà l' angolo *PgH* uguale all' angolo *PHg*; dunque la *PH* è uguale alla *Pg*; l' angolo poi *HPg* si è provato uguale all' angolo *DWC*, laonde il triangolo equicrure *PgH* sarà simile al triangolo equicrure *WDC*. Nello stesso modo si proverà la *YI* uguale alla *Yf*, e il triangolo isoscele *YfI* simile al triangolo isoscele *WED*, e così successivamente; sicchè la *qr* sarà uguale alla *rs*, e il triangolo *rqs* simile al triangolo *zÆn*.

E poichè la *PH* è parallela alla *TS*, la *Hg* alla *Si*, e la *Pg* alla *Ti*, sarà il triangolo *PgH* simile al triangolo *TiS*; ma è ancora la *PH* uguale alla *TS*, come lati opposti del parallelogrammo *HPTS*, dunque sarà la *Hg* uguale alla *Si*, o alla *XR*; e però *HX* è uguale alla differenza tra le *HR Hg*. La *HR* poi dinota la pressione ch' eserciterebbe sulla centina il secondo cuneo se non fosse gravato dal superiore, siccome *HX* dinota la pressione che difatto esso cuneo vi esercita; laonde il peso del primo cuneo produce l' effetto di togliere dalla natural pressione del secondo cuneo sulla centina una quantità uguale a *Hg*. Nella stessa maniera si dimostrerà che la *Id* è uguale alla differenza tra le *Ie If*, e che per conseguenza il peso de' due cunei superiori toglie dalla natural pressione del terzo cuneo sulla centina una quantità uguale a *If*; e così si potrà dire de' susseguenti cunei fino al cuneo *opzn*, dove sarà la *qt* uguale alla differenza tra le *qφ qs*; onde il peso di tutti i cunei superiori al cuneo *opzn* fa l' effetto di diminuire la sua natural pressione *qφ* sulla centina di una quantità uguale a *qs*.

E perchè i triangoli *PgH TiS* sono uguali, sarà la *Ti* o la *VQ* uguale alla *Pg*, e però sarà la *HV* uguale alla somma delle *Pg HQ*; la *Pg* poi è uguale alla *PH* cioè alla *GM*; laonde la spinta relativa *HV* con cui il secondo cuneo preme il terzo è uguale alla somma delle forze *GM HQ*, delle quali *HQ* è appunto la forza che eserciterebbe il secondo cuneo sul terzo senza il sopraccarico del primo, e *GM* la pressione del primo sul secondo. Similmente essendo *am* o *bc* uguale alla *YI*, cioè alla *HV*, sarà tutta la *Ib* uguale alla somma delle *HV Ic*; ma s' è dimostrata la *HV* uguale alla somma delle *GM HQ*, dunque la spinta relativa *Ib* del terzo cuneo sul quarto è uguale alla somma delle pressioni *GM HQ Ic* ch' eserciterebbe ri-

spettivamente ciascun de' tre primi cunei sull' inferiore, se, come il primo, non fossero anche gli altri due da' superiori aggravati: e così progredendo si proverà finalmente, che la spinta relativa qr, che soffre il cuneo $opzn$ dal suo superiore, è uguale alla somma delle pressioni, che tutti i cunei allo $opzn$ superiori eserciterebbero rispettivamente sugl' inferiori, se ognuno fosse il primo in ordine.

Premesse queste cose si passi alla generale risoluzione del problema. Si tiri dunque dal punto B la $B\Sigma$ parallela alla saetta dell' Arco, e dai punti n z le $n\pi$ $z\delta$ parallele alla corda; così gli angoli ai punti π δ riusciranno retti. Si ponga poi l' ascissa $B\pi = x$, l' ordinata $n\pi = y$, e la relazione tra l' incognite x y sarà data, perchè si suppone data la natura della curva $AB\Omega$: sarà poi $\pi\delta = dx = n\mu$, e $z\mu = dy$, ma l' archetto $nz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ si faccia $= ds$; e si prenda la formola del raggio osculatore dove ds sia costante per avere $n Æ = z Æ = \frac{dyds}{ddx}$; e però, fatta la grossezza uniforme dell' Arco $= g$, sarà la $o Æ = p Æ = \frac{dyds}{ddx} + g$.

E perchè sta $n Æ : o Æ :: nz : op$, o sia $\frac{dyds}{ddx} : \frac{dyds}{ddx} + g :: ds : op$, sarà $op = ds + \frac{gddx}{dy}$; e però sarà il settore $Æop = \left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) \cdot \left(\frac{ds}{2} + \frac{gddx}{2dy}\right)$, siccome l' altro settore $Ænz$ è $= \frac{dyds}{ddx} \cdot \frac{ds}{2}$; laonde lo spazio rimanente $opzn = \left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) \cdot \left(\frac{ds}{2} + \frac{gddx}{2dy}\right) - \frac{dyds}{ddx} \cdot \frac{ds}{2} = \frac{dyds^2}{2ddx} + \frac{gds}{2} + \frac{gds}{2} + \frac{g^2ddx}{2dy} - \frac{dyds^2}{2ddx} = gds + \frac{g^2ddx}{2dy}$: ma collo spazio $opzn$ si può esprimere la gravità del cuneo $opzn$, che si è ancora supposta proporzionale alla qu, dunque $qu = gds + \frac{g^2ddx}{2dy}$. E poichè la $n\mu$ è parallela alla qu, e la nz alla $q\varepsilon$ (essendo verticali amendue le prime ret- Dom. V. Lib. I

te, e amendue le seconde perpendicolari al raggio osculatore *Æzp*), sarà l' angolo $zn\mu$ uguale all' angolo ϵqu; ma ancora l' angolo $q\epsilon u$, supplemento a due retti dell' angolo $\epsilon q Æ$, non differendo dall' angolo retto che di una quantità infinitesima, è uguale all' angolo retto $n\mu z$; dunque il triangolo $q\epsilon u$ è simile al triangolo $n\mu z$, e sarà come $nz:n\mu::qu:q\epsilon$, o sostituendo $ds:dx::gds+\frac{g^2ddx}{2dy}:q\epsilon=gdx+\frac{g^2dxddx}{2dsdy}$: perchè poi ds è costante e $ds^2=dx^2+dy^2$, sarà differenziando $dxddx+dyddy=0$, e $dxddx=-dyddy$; quindi $q\epsilon=gdx-\frac{g^2ddy}{2ds}$. In simil guisa essendo $nz:z\mu::qu:\epsilon u$, o $ds:dy::gds+\frac{g^2ddx}{2dy}:\epsilon u$, si conseguirà $\epsilon u=q\phi=gdy+\frac{g^2ddx}{2ds}$.

Per la qual cosa essendosi ritrovato, che la pressione $q\epsilon$ che eserciterebbe un cuneo *opzn* sull' inferiore, se non avesse egli il sopraccarico de' superiori, è $=gdx-\frac{g^2ddy}{2ds}$, sarà la somma di dette pressioni da *B* fino al cuneo medesimo $opzn=\int\left(gdx-\frac{g^2ddy}{2ds}\right)$; ma a questa somma si è di sopra dimostrata uguale la spinta relativa qr del cuneo superiore allo *opzn*, dunque $qr=\int\left(gdx-\frac{g^2ddy}{2ds}\right)$: e preso l' integrale nel caso di ds costante, sarà $qr=gx-\frac{g^2dy}{2ds}+A$ (A è una costante finita ch' è facile a determinarsi avvertendo che quando l' ascissa x sia $=0$, la sopraddetta somma qr delle pressioni debbe diventare uguale all' infinitesima *GM* cioè uguale a zero); laonde essendo il triangolo *Ænz* simile al triangolo *rsq*, starà come $Æn:nz::qr:qs$, ovvero $\frac{dyds}{ddx}:ds::gx-\frac{g^2dy}{2ds}+A:qs$;

dunque la $qs = \frac{gxddx}{dy} - \frac{g^2ddx}{2ds} + \frac{Addx}{dy}$. Per fine essendosi provata la reale pressione qt del cuneo $opzn$ sulla centina uguale alla differenza tra la pressione $q\varphi$, ch' ei eserciterebbe senza il carico de' superiori, e la qs, sarà detta pressione $qt = gdy + \frac{g^2ddx}{2ds} - \frac{gxddx}{dy} + \frac{g^2ddx}{2ds} - \frac{Addx}{dy}$, e riducendo $qt = gdy + \frac{g^2ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}$; il che bisognava fare.

SCOLIO.

E' manifesto, che dal carico de' cunei superiori sugl' inferiori vengono prodotte le forze Hg If ecc..... qs *che cercano di allontanare i cunei dalla centina, le quali se saranno sempre minori delle pressioni* HR Ie ecc....... qφ, *ch' eserciterebbero rispettivamente i cunei se non fossero da' superiori aggravati, lascieranno in ogni cuneo un residuo di forza che sarà impiegata a premere la centina; di modo che tutti i cunei dell' Arco dal punto* B *all' impostatura* A *premeranno realmente la centinatura sottostante. Ma se si facessero maggiori, le pressioni diventerebbero negative, ovvero da quel luogo in poi i cunei sfiancherebbero, nè sussisterebbe l' Arco senza le sopraccentine. Negli Archi può accadere ora uno ed ora l' altro di questi casi secondo la natura del loro incurvamento, e le dimensioni di cui sono forniti. Intanto si osservi che le soprammentovate linee* Hg If ecc....... *sono ne' primi cunei infinitesime del secondo ordine, perchè le* PH YI ecc......*sono infinitesime del primo; ma quando l' arco* Bn *diventa finito, essendo la* qr, *cioè la somma delle* GM HQ Ic ecc...., *una quantità finita, la* qs *diventa infinitesima del primo ordine, come lo è ancora la* qφ.

COROLLARIO I.

Se la tangente al vertice B dell' ascisse fosse parallela all' ordinate, è manifesto, per le cose che si dimostrano nel calcolo differenziale, che tanto la ragione di dy a dx, che la ragione di ds a dx nel punto B, è quella che ha la quantità

infinita alla finita; e che ancora $ds = dy$: dunque nel punto B, cioè quando $x = 0$, sarà $ds = dy$, e $\frac{-g^2dy}{2ds} = -\frac{g^2}{2}$; ma nel caso in cui $x = 0$, debbe essere $gx - \frac{g^2dy}{2ds} + A = 0$; e però sarà $-\frac{g^2}{2} + A = 0$, e $A = \frac{g^2}{2}$; conseguentemente la pressione reale del cuneo $opzn$ sulla centina, quando la tangente al punto B sia parallela all' ordinate, diverrà $= gdy + \frac{g^2ddx}{ds} - (gx + \frac{g^2}{2})\frac{ddx}{dy}$.

COROLLARIO 2.

La spinta relativa che soffre il cuneo $opzn$ dal suo immediate superiore, vale a dire la qr, sarà $= gx - \frac{g^2dy}{2ds} + A$, dove A, come abbiamo detto, è una quantità costante, che si determina facendo nel caso di $x = 0$, la spinta suddetta pure $= 0$; laonde data l' equazione alla curva interiore $AB\Omega$, o la relazione tra x y, si potrà ritrovare la pressione soprammentovata per ogni qualunque punto n. Se poi la tangente al punto B fosse parallela all' ordinate, allora essendo $A = \frac{g^2}{2}$, riuscirà questa spinta $= gx - \frac{g^2dy}{2ds} + \frac{g^2}{2}$.

PROBLEMA 3. PROPOSIZIONE 3.

Poste le cose come nell' antecedente, e supposta una forza esteriore uguale a Q la quale prema il primo cuneo per una direzione perpendicolare alla commessura superiore; ritrovare la pressione esercitata da qualsivoglia cuneo infinitesimo sulla centina.

Si faccia la Figura e costruzione dell'antecedente colla sola differenza di prendere la HP non uguale alla sola pressione GM del primo cuneo sul secondo, come colà s'è fatto, ma alla GM insieme colla forza Q, che si suppone premere la commessura superiore FB del primo cuneo per una direzione ad essa FB perpendicolare. E qui si avvertirà, che siccome il peso del cuneo FC vien espresso dallo spazio FC, così per Q si dee intendere certa superficie che collo spazio FC sia in quella proporzione che ha la forza esteriore premente il primo cuneo alla rispettiva gravità di lui. Giugnendo pertanto colla costruzione sino al cuneo $opzn$, sia qr la forza con cui è egli premuto dal superiore contiguo; e il resto come nella citata proposizione. Fig. II. Tav. IV.

Si proverà similmente essere la pressione HX del secondo cuneo sulla centina uguale alla differenza delle HR Hg, la pressione Id del terzo cuneo uguale alla differenza delle Ie If, e così successivamente; di modo che la pressione del cuneo $opzn$ sarà uguale alla differenza delle $q\phi$ qs, esprimendo HR Ie ecc.... $q\phi$ le pressioni, che sarebbero esercitate da' cunei sulla centina senza il carico de' superiori, e se ognuno fosse il primo in ordine.

E' chiaro ancora, ch'essendo la PH, o la forza con cui il primo cuneo preme il secondo, uguale a $Q+GM$, sarà pure $Pg=Q+GM$. La HV poi o la IY è uguale alla somma delle Pg HQ, dunque la spinta relativa IY del secondo cuneo sul terzo è $=Q+GM+HQ$. Allo stesso modo si dimostrerà che la spinta relativa del terzo cuneo sul quarto è $=Q+GM+HQ+Ic$, e così successivamente; laonde la spinta relativa qr, che soffre il cuneo $opzn$ dal superiore contiguo, è uguale alla quantità Q insieme colle pressioni GM HQ Ic ecc.... fino ad esso $opzn$, che ogni cuneo eserciterebbe sull' inferiore senza il gravamento de' superiori.

Sicchè chiamata, come nell' antecedente, la $B\pi=x$, la $\pi n=y$, la grossezza uniforme dell' Arco $=g$, si troverà la superficie del cuneo $opzn$, o il suo peso, o vogliamo dire la $qu=gds+\frac{g^2ddx}{2dy}$; la pressione $q\phi$ che detto cuneo esercitereb-

be sulla centina senza il carico de' superiori $= gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds}$; e la pressione $q\epsilon$ che in simil caso sarebbe esercitata sull' inferiore contiguo $= gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}$; laonde per le cose dimostrate sarà la $qr = Q + \int\left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}\right)$; e preso l' integrale nell' ipotesi di ds costante, sarà $qr = Q + gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A$ (A è la costante che si aggiugne all' integrale, e ch' è facile a determinarsi, perchè nel punto B, o quando $x = 0$, la spinta relativa qr diventa $= Q$) : ma come $Æn : mz :: qr : qs$, dunque $\frac{dyds}{ddx} : ds :: Q + gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A : qs = \frac{gxddx}{dy} - \frac{g^2 ddx}{2ds} + (A + Q)\frac{ddx}{dy}$; e per conseguenza la ricercata reale pressione del cuneo $opzn$ sulla centinatura, che debbe essere uguale a $q\varphi - qs$, diventerà $= gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds} - \frac{gxddx}{dy} + \frac{g^2 ddx}{2ds} - (A + Q) . \frac{ddx}{dy}$ $= gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - \frac{gxddx}{dy} - (A + Q)\frac{ddx}{dy}$; il che ecc.

COROLLARIO.

E però la spinta relativa del cuneo superiormente contiguo allo $opzn$, cioè la qr, è $= Q + gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A$, dove A si determina facendo la suddetta spinta $qr = Q$ nel caso di $x = 0$.

PROBLEMA 4. PROPOSIZIONE 4.

Se fra i pilastri sia messa una centina dotata di quell' incurvamento interiore, che debbe avere l' Arco di uniforme grossezza, poi sienvi collocati sopra da una parte i cunei fino a un

un certo determinato luogo; ſi domanda il punto d' equilibrio, quando vi ſia, cioè il punto a cui corriſponde un cuneo che nè preme nè ſfianca.

Sia la centina $AB\Omega$ di qualſivoglia curvatura collocata tra i pilaſtri di un Arco, e vi ſieno adattati ſopra i cunei fino in B: biſogna ritrovare il punto d'equilibrio, quando vi ſia, o un punto n, dove il cuneo corriſpondente *opzn* nè prema la centina nè ſfianchi. Fig. II. Tav. IV. Diff. 17 Lib. I.

Facciaſi come nella propoſizione 2 di queſto l' aſciſſa $B\pi = x$, l' ordinata $\pi n = y$, $\pi\delta = n\mu = dx$, $z\mu = dy$, $nz = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = ds$, e la groſſezza uniforme *no* dell' Arco $= g$: ſarà per le coſe dimoſtrate la preſſione impiegata dal cuneo *opzn* ſulla centina $= gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}$, nella qual formola A è una coſtante, che biſogna aggiugnere alla quantità $gx - \frac{g^2 dy}{2ds}$ affinchè la loro ſomma $gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A$, nel caſo di $x = 0$, diventi eſſa pure uguale a zero. Ora è manifeſto, che ſe il cuneo *opzn* nè preme la centina nè ſfianca, conviene che il valore della ſua preſſione ſia $= 0$; e però Prop. 2 di queſto

$$gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy} = 0.$$

Se pertanto ſi differenzierà l' equazione alla curva $AB\Omega$ (quando eſſa ſia algebraica), e ſi faranno le debite ſoſtituzioni, troveraſſi un' equazione determinata, che biſognerà ſvolgere e riſolvere per aver noto il valor dell' aſciſſa $B\pi$, o dell' ordinata $n\pi$, corriſpondenti al punto d' equilibrio n. Gli eſempli delle propoſizioni ſuſſeguenti renderanno la coſa più chiara.

S c o l i o.

Se il calcolo darà il valor di x *reale, poſitivo, e non maggiore di* BΣ, *ſarà ſegno che v' ha realmente nella centina il punto d' equilibrio; ma ſe all' incontro la* Bπ *ſi trovaſſe immaginaria, o*

V

negativa, o maggiore di BΣ, *non vi sarebbe alcun punto d' equilibrio. Può poi ancora accadere che l' equazione determinata, che somministra il modo di trovare il punto d' equilibrio, dia più di un valore di* x *reale, positivo, e non maggiore di* BΣ, *e allora vorrà dire che nella centina vi sono più punti d' equilibrio, e tanti ve ne saranno, quanti i valori di* x *delle sopraddette proprietà forniti.*

Corollario 1.

E se la tangente al punto B sia parallela all' ordinate, essendosi provato che $A = \frac{g^2}{2}$, dovrassi fare in questo caso $gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - \left(gx + \frac{g^2}{2}\right)\frac{ddx}{dy} = 0$ per conseguire il punto d'equilibrio; e però il calcolo riuscirà più spedito, perchè non vi sarà bisogno di determinare la costante A.

Corol. 1 Prop. 2 di questo

Corollario 2.

Quando il primo cuneo FC sia esternamente premuto con una forza $= Q$ per una direzione perpendicolare alla sua commessura superiore FB, s' è dimostrato che la pressione del cuneo $opzn$ sulla centina è $= gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - \frac{gxddx}{dy} - (A + Q)\frac{ddx}{dy}$; quindi se la x o la $B\pi$ sia quell' ascissa a cui corrisponde il punto d' equilibrio, dovrà essere $gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - \frac{gxddx}{dy} - (A + Q)\frac{ddx}{dy} = 0$; e la costante A si determinerà sulla cognizione che quando sia $x = 0$ dee valere l' equazione $Q + gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A = Q$, o $gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A = 0$.

Prop. 3 di questo

Luog. cit.

Corollario 3.

Per determinare il centro di gravità q del cuneo $opzn$ che nè preme nè sfianca, sarà d' uopo avere prima il punto d' e-

quilibrio n, poi condurre il raggio osculatore $n\mathcal{E}$, e chiamata $n\mathcal{E} = b$, porre $q\mathcal{E} = \frac{6b^2+6bg+2g^2}{3(2b+g)}$; e sarà determinato il centro di gravità q; e ciò per la ragione che il cuneo infinitesimo $opzn$ si può considerare come cuneo di Arco circolare del raggio interiore $= b$, e della grossezza $= g$. Anzi confondendosi fra di loro i punti q l, basterà fare la $\mathcal{E}l = \frac{6b^2+6bg+2g^2}{3(2b+g)}$, e il punto l sarà il centro di gravità del cuneo $opzn$ che al punto d'equilibrio corrisponde. Corol. 2 Prop. 9 Lib. I.

PROBLEMA 5. PROPOSIZIONE 5.

Ritrovare da una o dall' altra parte il punto d'equilibrio in un Arco intero circolare, nel quale sieno stati posti sulla centina tutti i cunei e il serraglio.

Il punto Z, dove cominciano i cunei infinitesimi a premere la mezza centina AZ, sarà nella sommità del semicerchio AZG, la tangente del punto Z sarà parallela all' ordinate, e ZQ sarà saetta e raggio, onde fatta $ZI = x$, $IB = y$, e il raggio $ZQ = b$, s'avrà l'equazione $y = \sqrt{(2bx - x^2)}$; e supposto che E sia il punto d'equilibrio, e la grossezza AM dell' Arco $= g$, dovrà verificarsi l'equazione $gdy + \frac{g^2ddx}{ds} - \left(gx + \frac{g^2}{2}\right)\frac{ddx}{dy} = 0$. Fig. XIII. Tav. II. Corol. 1 Prop. ant.

Si differenzj l'equazione al cerchio per avere $dy = \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, e $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{dx^2(b-x)^2}{2bx - x^2}\right)} = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$; laonde $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}$; e di nuovo differenziando nell' ipotesi di ds costante, si ritroverà $\frac{ddx}{ds} =$

$\frac{dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}}$: per conseguenza $\frac{ddx}{ds} \cdot ds = ddx = \frac{dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}} \cdot \frac{bdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}} = \frac{dx^2(b-x)}{2bx-x^2}$; è poi la $dy = \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$; dunque $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx^2(b-x)}{2bx-x^2} : \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$.

Per il che essendo nel punto d' equilibrio $gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + \frac{g^2}{2}) \cdot \frac{ddx}{dy} = 0$, sarà, sostituendo i valori ritrovati di sopra, $\frac{gdx(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}} + \frac{g^2 dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}} - (gx + \frac{g^2}{2}) \cdot \frac{dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}} = 0$, e levando i denominatori e dividendo per dx, si conseguirà $2bg(b-x) + 2g^2(b-x) - 2bgx - bg^2 = 0$, cioè $2b(b-x) + 2g(b-x) - 2bx - bg = 0$, ovvero $2b^2 - 2bx + 2bg - 2gx - 2bx - bg = 0$; e però $x = \frac{2b^2 + bg}{4b + 2g} = \frac{b}{2}$; laonde fatta la ZI uguale alla metà del raggio ZQ, e tirata l' ordinata IE, sarà E il punto d' equilibrio da una parte dell' Arco intero, affatto come s' era con metodo sintetico dimostrato al corollario 4 della prop. 12 del Libro II.

Corollario I.

Qualunque sia la grossezza $AM = g$ dell' Arco intero, s' è trovata la $ZI = \frac{b}{2}$; dunque per quanto si assottiglino o s' ingrossino i cunei di un Arco intero, fermo il raggio interiore, non si cangierà mai l' ascissa alla quale corrisponde da una parte e dall' altra il punto d' equilibrio dell' Arco medesimo, ma sarà sempre uguale alla metà del raggio interiore.

Corollario 2.

Se AZG fosse un Arco circolare scemo, in cui fossero stati posti tutti i cunei, si ritroverà, come nella proposizione, che

l' aſciſſa ZI, alla quale corriſponde il punto d' equilibrio da ciaſcuna parte, debbe eſſere uguale alla metà del raggio, che appartiene al cerchio del ſegamento minore AZG. Per il che ſe la ſaetta foſſe uguale alla metà del raggio medeſimo, il punto d' equilibrio cadrà da ciaſcuna parte nell' impoſte; e ſe foſſe della metà del raggio minore, non vi ſarà nell' Arco alcun punto d' equilibrio; e sì nell' uno che nell' altro caſo tutti i cunei dal ſerraglio all' impoſte premeranno la centinatura.

COROLLARIO 3.

Eſſendoſi dimoſtrato, che qualunque ſia la curvatura della centina, quando la tangente al punto Z è parallela all' ordinate, la ſpinta relativa del cuneo corriſpondente alle coordinate $x\ y$ è $= gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + \frac{g^2}{2}$; ſarà detta ſpinta nell' Arco circolare AZG, ſia egli ſcemo o intero, uguale a $gx - \frac{g^2 dx(b-x)}{2\sqrt{(2bx-x^2)}} : \frac{bdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}} + \frac{g^2}{2} = gx - \frac{g^2(b-x)}{2b} + \frac{g^2}{2}$. Corol. 2 Prop. 2 di queſto

PROBLEMA 6. PROPOSIZIONE 6.

Trovare il punto d' equilibrio in un Arco intero o ſcemo circolare riempiuto inferiormente di cunei da una parte fino a certo dato ſegno, non fino al ſerraglio.

Nell' Arco intero CBH o ſcemo ABG ſieno da una parte collocati i cunei non fino al ſerraglio B, ma fino ad un punto qualunque I: biſogna ritrovare il punto d' equilibrio nella centina CI o AI, che ſerve di baſe alla parte riempiuta dell' Arco. Fig. III. Tav. IV.

Si conduca dal punto I la IV parallela alla corda, e la IK parallela alla ſaetta, e preſa nella IK qualſivoglia aſciſſa IP, ſi tiri l' ordinata PQ e ſi prolunghi fino in M. Indi ſi faccia la $IP = x$, la $PQ = y$, la $BV = a$, la $IV = PM = m$,

e il raggio $RB = b$; e s' avrà la feguente equazione $(y+m)^2 = b^2 - (b-a-x)^2$. Ma differenziando farà $2dy(y+m) = 2dx(b-a-x)$, e $dy = \frac{dx(b-a-x)}{y+m}$; è poi $y+m = \sqrt{(b^2 - (b-a-x)^2)}$; dunque $dy = \frac{dx(b-a-x)}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}$; e però $ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{dx^2(b-a-x)^2}{b^2-(b-a-x)^2}\right)} = \frac{bdx}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}$: per confeguenza $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{b}\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}$; e di nuovo differenziando nell' ipotefi di ds coftante fi otterrà $\frac{ddx}{ds} = \frac{dx(b-a-x)}{b\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}$; onde $\frac{ddx}{ds}.ds = ddx = \frac{dx(b-a-x)}{b\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}} . \frac{bdx}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}} = \frac{dx^2(b-a-x)}{b^2-(b-a-x)^2}$; e però $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx^2(b-a-x)}{b^2-(b-a-x)^2} : \frac{dx(b-a-x)}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}$.

E perchè la tangente al punto I non è parallela all' ordinate, fa d' uopo prendere pel punto d' equilibrio l' equazione $gdy + \frac{g^2ddx}{ds} - (gx+A)\frac{ddx}{dy} = 0$, e prima determinare la coftante A onde poter fvolgere l' equazione fuddetta. Ma nel cafo di $x = 0$ debbe effere $gx - \frac{g^2dy}{2ds} + A = 0$, e foftituendo i valori di dy e ds, $gx - \frac{g^2dx(b-a-x)}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}} : \frac{2bdx}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}} + A = 0$, ovvero $gx - \frac{g^2(b-a-x)}{2b} + A = 0$, dunque fatta effettivamente $x = 0$ fi confeguirà $-\frac{g^2(b-a)}{2b} + A = 0$; e però la coftante $A = \frac{g^2(b-a)}{2b}$. Pertanto poichè nel punto d' equilibrio riefce $gdy + \frac{g^2ddx}{ds} - (gx$

Prop. 4 di quefto

Luog. cit.

$+ A) \frac{ddx}{dy} = 0$, fatte le sostituzioni, s'avrà $\frac{gdx(b-a-x)}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}$
$+ \frac{g^2dx(b-a-x)}{b\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}} - \left(gx + \frac{g^2(b-a)}{2b}\right) . \frac{dx}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}} = 0$,
e levando i denominatori e dividendo per gdx, sarà $(2b + 2g).(b-a-x) - 2bx - bg + ag = 0$, ovvero $2b^2 - 2ab - 2bx + 2bg - 2ag - 2gx - 2bx - bg + ag = 0$, e però $2b^2 - 2ab + bg - ag = 4bx + 2gx$; laonde $x = \frac{2b^2 - 2ab + bg - ag}{4b + 2g} = \frac{b-a}{2}$. E poichè la $BR = b$, e la $BV = a$, sarà la rimanente $VR = b - a$; quindi $x = \frac{VR}{2}$; sicchè supponendo che la VR sia divisa per mezzo nel punto M, dal quale sia condotta l' ordinata MQ, s' avrà in Q il punto d' equilibrio ricercato nella porzione CI o AI d'Arco intero o scemo, come s' era ritrovato nel corol. 4 della prop. 12 del Libro II., ove dai cunei finiti si era passato agl' infinitesimi.

COROLLARIO I.

E' chiaro ancora, che qualunque sia la grossezza de' cunei, fermo il raggio interiore b e la linea IK di grandezza e di posizione, l' ascissa a cui corrisponde il punto d' equilibrio nella parte riempiuta CI o AI è sempre la stessa, e uguale alla metà della VR.

COROLLARIO 2.

Di mano in mano che si continua da una parte ad empiere l' Arco intero o scemo, s' innalza il punto d' equilibrio, cosicchè riempiuto fino al serraglio si trova il punto medesimo tanto alto, quanto lo può mai essere.

PROBLEMA 7. PROPOSIZIONE 7.

Determinare il punto d' equilibrio in un' ovale architettonica composta di più archi circolari, dopo di avere collocati tutti i cunei sulla centina, supposta però uniforme la grossezza dell' ovale.

Fig. IV. Tav. IV. Sogliono gli Architetti costruire le ovali col mezzo di più archi di cerchio, i quali quando sieno ben combinati non lasciano distinguere se l' Arco sia formato con più Archi circolari, ovvero con una curva di altra natura. Di queste costruzioni ne prenderemo una molto elegante, ch' è del chiarissimo *Leonardo Ximenes*, e che servirà alla risoluzione del problema.

Si divida la corda CD in sei parti uguali ne' punti M H E b m; e sulla Hb si costruisca inferiormente il triangolo equilatero HBb, i di cui lati BH Bb si prolunghino di sopra ne' punti F f: poi divise per mezzo esse BH Bb ne' punti L l si conducano le linee LMZ lmz; indi si faccia la saetta AE uguale a un terzo della corda, o uguale alla Hb, e col centro B ed intervallo BA si descriva l'arco FAf. Di nuovo coi centri L l ed intervalli LF lf si descrivano gli archi FZ fz; e finalmente coi centri M m, ed intervalli MZ mz gli archi ZC zD, che si dimostrerà convenire ne' punti C D. A tutti gli archi suddetti si assegni una grossezza uniforme, che sia $= g$, e sarà costruita la faccia CGD dell' ovale architettonica. Si domanda pertanto il punto d' equilibrio da una o dall' altra parte dell' ovale medesima, supposti collocati sulla centina tutti i cunei e il serraglio.

Sia la corda $CD = 6c$, sicchè $CM = MH = HE = Eb = bm = mD = HL = LB = c$, e la $Hb = BH = AE = 2c$: sarà per la ragione del triangolo rettangolo BHE, la $BE = \sqrt{3c^2} = c\sqrt{3}$, e però tutta la $AB = BF = 2c + c\sqrt{3}$: sta poi come $HB : BE :: BF : BR$, ovvero $2c : c\sqrt{3} :: 2c + c\sqrt{3} : BR$; laonde $BR = c\sqrt{3} + \frac{3}{2}c$, e però la rimanente $AR = AB - BR = 2c +$

$c\sqrt{3}$

$c\sqrt{3} - c\sqrt{3} - \frac{3}{2}c = \frac{c}{2}$: ma $\frac{c}{2}$ è minore della metà di $2c + c\sqrt{3}$; dunque ancora AR sarà minore della metà del raggio AB dell' Arco FAf. Vi ha dunque un Arco scemo circolare FAf la di cui saetta è minore della metà del raggio, laonde non vi può essere in esso Arco alcun punto d' equilibrio, e tutti i cunei, che lo compongono, premeranno da ciascuna parte la centinatura. Si passi ora ad esaminare se il punto d' equilibrio dalla parte AC dell' ovale cada nel secondo Arco circolare FZ; ma prima si avverta, che siccome nell' Arco AF (che ha la tangente del vertice A parallela all' ordinate) presa qualunque ascissa $AO = x$, e chiamato il raggio $AB = b$, succede che la spinta relativa del cuneo infinitesimo corrispondente al punto P si fa $= gx - \frac{g^2(b-x)}{2b} + \frac{g^2}{2}$; così, sostituendo in luogo di x la $AR = \frac{c}{2}$, e in luogo di b la grandezza $2c + c\sqrt{3}$, sarà vero, che la spinta relativa esercitata dall' ultimo cuneo infinitesimo dell' Arco AF sul primo dell' Arco susseguente FZ per una direzione perpendicolare alla comune commessura FK è $= \frac{cg}{2} - \frac{g^2(2c + c\sqrt{3} - \frac{c}{2})}{2(2c + c\sqrt{3})} + \frac{g^2}{2} = \frac{cg}{2} - \frac{g^2(3c + 2c\sqrt{3})}{8c + 4c\sqrt{3}} + \frac{g^2}{2}$; e riducendo tutto sotto un comun denominatore, diventerà la suddetta spinta ridotta $= \frac{4cg + 2cg\sqrt{3} + g^2}{8 + 4\sqrt{3}}$. Per il che fatta detta forza premente il primo cuneo dell' Arco $FZ = Q$, s' avrà $Q = \frac{4cg + 2cg\sqrt{3} + g^2}{8 + 4\sqrt{3}}$.

Corol. 2 Prop. 5 di questo

Corol. 3 Prop. cit.

Ora si termini l' Arco FZ fino al suo incontro in N colla retta LN parallela alla AB, e si tirino le FV ZT parallele alla medesima AB, e la ZX parallela alla corda CD. E perchè $FL = BF - LB = 2c + c\sqrt{3} - c = c + c\sqrt{3}$, sarà anche $ZL = c + c\sqrt{3}$; ma la $RE = FV = BR - BE$ sarà $= c\sqrt{3} + \frac{3c}{2}$

$-c\sqrt{3}=\frac{3c}{2}$. In oltre sarà la HW uguale alla metà della HE, o $=\frac{c}{2}$, e la $ML=\sqrt{((MH)^2+(HL)^2+2MH\,.\,HW)}$ $=\sqrt{(c^2+c^2+\frac{2c^2}{2})}=c\sqrt{3}$, la ZL poi riesce $=FL=c+c\sqrt{3}$, dunque la rimanente $ZM=c=CM$, come nella costruzione ci eravamo riservati di dimostrare. E poichè la LW è uguale alla metà della EB, sarà $LW=\frac{c}{2}\sqrt{3}$, e però la $LI=LW+RE=\frac{c}{2}\sqrt{3}+\frac{3c}{2}$; ma tutta la $LN=FL=c+c\sqrt{3}$, dunque la rimanente $NI=c+c\sqrt{3}-\frac{c}{2}\sqrt{3}-\frac{3c}{2}=\frac{c}{2}\sqrt{3}-\frac{c}{2}$. Finalmente essendo come $ML:LW::ZM:ZT$, sarà sostituendo $c\sqrt{3}:\frac{c}{2}\sqrt{3}::c:ZT=\frac{c}{2}=XV$, laonde $FX=FV-XV=\frac{3c}{2}-\frac{c}{2}$ $=c$; e però se a qualche ascissa FS dee corrispondere nell' Arco FZ il punto d' equilibrio dell' ovale architettonica, bisogna che la FS sia minore di FX o di c, altrimenti esso punto non cadrebbe più nell' Arco sopraddetto FZ.

Determinate pertanto queste linee, si rifletta essere FZ una parte di Arco scemo circolare il di cui primo cuneo è superiormente premuto da una forza $=Q$ con direzione perpendicolare alla sua commessura superiore FK; onde fatta la $FS=x$, la $ST=y$, la grossezza dell' Arco $=g$, se in esso FZ vi sia
Corol. 2 Prop. 4 di questo punto d'equilibrio, dovrà essere $gdy+\frac{g^2ddx}{ds}-\frac{gxddx}{dy}-(A+Q)\frac{ddx}{dy}=0$, e A una quantità costante da ritrovarsi facendo nel caso di $x=0$, $Q+gx-\frac{g^2dy}{2ds}+A=Q$. Chiamata poi per facilità di calcolo la $NI=b$, il raggio $LN=a$, e la $FI=m$, si ha l'equazione $(y+m)^2=a^2-(a-b-x)^2$ all' Arco

FZ, dalla quale si ricava $dy = \frac{dx(a-b-x)}{\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}}$, $ds = \frac{adx}{\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}$, $\frac{ddx}{ds} = \frac{dx(a-b-x)}{a\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{1}{a}(a-b-x)$, $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx}{\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}}$; dunque $Q + gx - \frac{g^2dy}{2ds} + A = Q + gx - \frac{g^2}{2a}(a-b-x) + A$; ma nel caso di $x = 0$ vale l' equazione $Q + gx - \frac{g^2dy}{2ds} + A = Q$, laonde $Q - \frac{g^2}{2a}(a-b-x) + A = Q$, e però $A = \frac{g^2}{2a}(a-b)$: per conseguenza se nell' Arco *FZ* vi ha punto d' equilibrio, sarà $gdy + \frac{g^2ddx}{ds} - \left(gx + \frac{g^2}{2a}(a-b) + Q\right)\frac{ddx}{dy} = 0$, ovvero $\frac{gdx(a-b-x)}{\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}} + \frac{g^2dx(a-b-x)}{a\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}} - \left(gx + \frac{g^2}{2a}(a-b) + Q\right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{(a^2-(a-b-x)^2)}} = 0$; quindi $g(a-b-x) + \frac{g^2}{a}(a-b-x) - gx - \frac{g^2}{2a}(a-b) - Q = 0$, cioè $\frac{ag+g^2}{a}.(a-b-x) - gx - \frac{g^2}{2a}(a-b) - Q = 0$, oppure sarà $\frac{ag+g^2}{a}.(a-b) - gx - \frac{g^2x}{a} - gx - \frac{g^2}{2a}(a-b) - Q = 0$, che ridotta dà l' altra equazione $\frac{2ag+g^2}{2a}.(a-b) - \frac{2ag+g^2}{a}.x - Q = 0$, e $x = \frac{a-b}{2} - \frac{aQ}{2ag+g^2}$. Ma il raggio *LN*, che per calcolare con maggiore speditezza si è chiamato $= a$, è di fatto $= c + c\sqrt{3}$, così la *NI* o il $b = \frac{c}{2}\sqrt{3} - \frac{c}{2}$, e il *Q*

$= \frac{4cg + 2cg\sqrt{3} + g^2}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{4cg + 2cg\sqrt{3} + g^2}{(1 + \sqrt{3}).(2 + 2\sqrt{3})}$; dunque fostituendo questi valori s' avrà $x = \frac{1}{2}(c + c\sqrt{3} - \frac{c}{2}\sqrt{3} + \frac{c}{2}) - \frac{c + c\sqrt{3}}{2cg + 2cg\sqrt{3} + g^2} . \frac{4cg + 2cg\sqrt{3} + g^2}{(1 + \sqrt{3}).(2 + 2\sqrt{3})} = \frac{3c + c\sqrt{3}}{4} - \frac{4c^2 + 2c^2\sqrt{3} + cg}{(2c + 2c\sqrt{3} + g).(2 + 2\sqrt{3})}$; e però ancora $x = \frac{3c + c\sqrt{3}}{4} - \frac{2c^2 + 2c^2\sqrt{3} + cg}{(2c + 2c\sqrt{3} + g).(2 + 2\sqrt{3})} - \frac{2c^2}{(2c + 2c\sqrt{3} + g).(2 + 2\sqrt{3})} = \frac{3c + c\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{2 + 2\sqrt{3}} - \frac{c^2}{(2c + 2c\sqrt{3} + g).(1 + \sqrt{3})} = \frac{6c + 6c\sqrt{3} + 2c\sqrt{3} + 6c - 4c}{8 + 8\sqrt{3}} - \frac{c^2}{8c + 4c\sqrt{3} + g + g\sqrt{3}}$, o finalmente $x = c - \frac{c^2}{8c + 4c\sqrt{3} + g + g\sqrt{3}}$: è poi manifestamente questo valore di x minore di c, dunque all' ascissa $FS = c - \frac{c^2}{8c + 4c\sqrt{3} + g + g\sqrt{3}}$ corrisponde nell' Arco FZ un punto d' equilibrio dell' ovale architettonica: similmente si troverà dall' altra parte il punto d' equilibrio; dunque ecc.

C o r o l l a r i o.

Il progresso del calcolo instituito per l' ovale CGD di cinque archi circolari mostra ad evidenza come si debbano cercare i punti d' equilibrio se fosse di un maggior numero di Archi formata e di differente costruzione.

PROBLEMA 8. PROPOSIZIONE 8.

Ritrovare il punto d' equilibrio in un Arco, la di cui convessità abbia la forma di una catenaria comune, e la grossezza sia uniforme.

Fatta $BC = x$, $CD = y$, l'equazione alla catenaria comune è $dy = \frac{adx}{\sqrt{(2ax + x^2)}}$, ove a è certa quantità che si ritrova facendo la metà AB della catenaria $= s$, e la saetta $BF = q$, poi $a = \frac{s^2 - q^2}{2q}$, e ciò per le cose dimostrate dal celebre *Giovanni Bernoulli Tom. III. pag.* 491 *Edit. Lausannæ & Genevæ*; dunque $ds^2 = dx^2 + \frac{a^2dx^2}{2ax + x^2} = \frac{(a + x)^2 . dx^2}{2ax + x^2}$, e però $ds = \frac{dx(a + x)}{\sqrt{(2ax + x^2)}}$, e $\frac{dx}{ds} = \frac{\sqrt{(2ax + x^2)}}{a + x}$; e differenziando nell' ipotesi di ds costante si conseguirà $\frac{ddx}{ds} = \Big(\frac{dx(a + x)^2}{\sqrt{(2ax + x^2)}} - dx\sqrt{(2ax + x^2)}\Big) : (a + x)^2 = \frac{a^2dx}{(a+x)^2 . \sqrt{(2ax+x^2)}}$: per conseguenza $ddx = \frac{ddx}{ds} . ds = \frac{a^2dx}{(a + x)^2 . \sqrt{(2ax + x^2)}} . \frac{dx(a + x)}{\sqrt{(2ax + x^2)}} = \frac{a^2dx^2}{(a + x) . (2ax + x^2)}$, e $\frac{ddx}{dy} = \frac{a^2dx^2}{(a+x) . (2ax+x^2)} : \frac{adx}{\sqrt{(2ax+x^2)}} = \frac{adx}{(a + x) . \sqrt{(2ax + x^2)}}$. E perchè la tangente al punto B è parallela all' ordinate, se nella catenaria ABE havvi punto d'equilibrio da ciascuna parte, dovrà valere l'equazione $gdy + \frac{g^2ddx}{ds} - \frac{gxddx}{dy} - \frac{g^2ddx}{2dy} = 0$, cioè, sostituendo, $\frac{agdx}{\sqrt{(2ax + x^2)}} + \frac{a^2g^2dx}{(a + x)^2 . \sqrt{(2ax + x^2)}} - \frac{\left(gx + \frac{g^2}{2}\right) . adx}{(a + x) . \sqrt{(2ax + x^2)}} = 0$; e però $2(a + x)^2 + 2ag - (2x + g) . (a + x) = 0$, ovvero $2a^2 + 4ax + 2x^2 + 2ag - 2ax - ag - 2x^2 - gx = 0$, dalla qual equazione si ricava $x = \frac{2a^2 + ag}{g - 2a}$, ch' è una quantità reale. E però se essa quantità sia ancora positiva e minore della saetta BF, vi

Fig. V. Tav. IV.

Corol. 1 Prop. 4 di questo

farà dall' una e dall' altra parte della catenaria comune un punto d' equilibrio che corrisponderà all' ascissa $BC = \frac{2a^2 + ag}{g - 2a}$; il che ecc.

COROLLARIO.

Sia la mezza catenaria AB sesquidecima della saetta BF, cioè sia $s = \frac{11q}{10}$, s' avrà $a = \frac{s^2 - q^2}{2q} = \frac{1}{2q}\left(\frac{121}{100}q^2 - q^2\right) = \frac{21}{200}q$: sia poi la grossezza g dell' Arco $= \frac{5a}{2} = \frac{105}{400}q$; sarà, sostituendo, $\frac{2a^2 + ag}{g - 2a} = \left(2a^2 + \frac{5a^2}{2}\right) : \left(\frac{5a}{2} - 2a\right) = 9a = \frac{189}{200}q$; laonde presa l' ascissa $BC = \frac{189}{200}q$, o a cento ottanta nove ducentesimi della saetta, e ordinata la CD, vi sarà in D un punto d' equilibrio da una parte dell' Arco; e lo stesso succederà dall' altra parte.

PROBLEMA 9. PROPOSIZIONE 9.

Trovare i punti d' equilibrio negli Archi iperbolici e negli elittici di grossezza uniforme.

Fig. VII. Tav. IV. Nell' Arco iperbolico o elittico FBG, fatta la $BC = x$, la $CD = y$, l' asse primario $= 2a$, e il conjugato $= 2b$, s' avrà l' equazione $y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax \pm x^2)}$, dove il segno superiore vale quando la curva interiore FBG sia un' iperbole, e l' inferiore allora che sia un' elissi. Dunque differenziando si troverà $dy = \frac{bdx(a \pm x)}{a(2ax \pm x^2)^{1:2}}$, e però $ds = \frac{dx}{a}\left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)^{1:2}$, e $\frac{dx}{ds} = a\left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)^{-1:2}$; e di nuovo differenziando nell' ipotesi

di ds coſtante s' avrà $\frac{ddx}{ds} = \frac{a^3b^2dx(a \pm x)}{(2ax \pm x^2)^2 \cdot \left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)^{3:2}}$,

e $\frac{ddx}{ds} \cdot ds = ddx = \frac{a^3b^2dx(a \pm x)}{(2ax \pm x^2)^2 \cdot \left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)^{3:2}} \cdot \frac{dx}{a}\left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)^{1:2} = \frac{a^2b^2dx^2(a \pm x)}{(2ax \pm x^2)^2 \cdot \left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)}$; e per conſeguenza $\frac{ddx}{dy} = \frac{a^2b^2dx^2(a \pm x)}{(2ax \pm x^2)^2 \cdot \left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)} : \frac{bdx(a \pm x)}{a(2ax \pm x^2)^{1:2}}$

$= \frac{a^3bdx}{(2ax \pm x^2)^{3:2} \cdot \left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)}$. Eſſendo pertanto la tangente al punto B parallela all' ordinate, ſe nell' Arco FBG vi ſia punto d' equilibrio da ciaſcuna parte, dovrà eſſere $gdy + \frac{g^2ddx}{ds} - \frac{gxddx}{dy} - \frac{g^2ddx}{2dy} = 0$, eſprimendo la lettera g la groſſezza uniforme dell' Arco medeſimo; quindi ſoſtituendo s' avrà $\frac{bgdx(a \pm x)}{a(2ax \pm x^2)^{1:2}} +$

$$\frac{a^3b^2g^2dx(a \pm x)}{(2ax \pm x^2)^2 \cdot \left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)^{3:2}} - \frac{a^3bdx\left(gx + \frac{g^2}{2}\right)}{(2ax \pm x^2)^{3:2} \cdot \left(a^2 + \frac{b^2(a \pm x)^2}{2ax \pm x^2}\right)} = 0,$$

e traſportando e riducendo ſarà $\frac{2a^4bg(a \pm x)}{\sqrt{\left(a^2(2ax \pm x^2) + b^2(a \pm x)^2\right)}}$ $= a^4(2x + g) - 2(a \pm x) \cdot \left(a^2(2ax \pm x^2) + b^2(a \pm x)^2\right)$. Per la qual coſa ſe da queſta equazione riſoluta ſi ricavi un valor di x reale, poſitivo, e minore della ſaetta BE, ſarà data l' aſciſſa a cui corriſponde nell' Arco iperbolico, o nell' elittico dall' una e dall' altra parte un punto d' equilibrio; il che ecc.

COROLLARIO.

Sia per efempio propofto di trovare il punto d' equilibrio in un Arco iperbolico la cui groffezza g fia $= 2a$, e l' affe conjugato $2b = 6a$, e però $b = 3a$: farà foftituendo quefti valori nell' equazione ora determinata e prendendo i fegni fuperiori, $\frac{12a^6(a+x)}{\sqrt{\left(a^2(2ax+x^2)+9a^2(a+x)^2\right)}} = 2a^4.(a+x) - 2(a+x).$ $\left(a^2(2ax+x^2)+9a^2(a+x)^2\right)$, ovvero $\frac{6a^3}{\sqrt{(9a^2+20ax+10x^2)}} = a^2 - (9a^2+20ax+10x^2)$; laonde fe fi dica $\sqrt{(9a^2+20ax+10x^2)} = z$, farà ancora $\frac{6a^3}{z} = a^2 - z^2$, e $6a^3 = a^2z - z^3$, che è un' equazione del terzo grado dotata di una fola radice reale, ed è $z = -2a$, dunque $\sqrt{(9a^2+20ax+10x^2)} = -2a$, e $x^2 + 2ax = -\frac{a^2}{2}$. Ora fe da quefta nuova equazione del fecondo grado fi cavi il valor di x, farà quefto $= -a \pm \sqrt{\frac{a^2}{2}}$, quantità bensì reale ma fempre negativa, qualunque de' due fegni fi prenda, de' quali è affetto il radicale $\sqrt{\frac{a^2}{2}}$: laonde nel propofto Arco iperbolico non v' ha alcun punto d' equilibrio, e tutti i cunei premono la centina.

PROBLEMA 10. PROPOSIZIONE 10.

In un Arco di qualfivoglia curvatura interiore e di uniforme groffezza, in cui fieno ftati pofti tutti i cunei, o parte, ritrovare la fomma delle preffioni efercitate da' cunei fuperiori fulla centinatura fino a un determinato fegno.

Fig. II. Tav. IV. Sia $A\Omega$ un Arco di qualfivoglia curvatura fu di cui fieno ftati collocati i cunei da una parte fino in B: bifogna ritro-

vare

vare la somma delle pressioni di un numero di cunei superiori sulla centina; per esempio di quelli che sono fra i punti B n, supponendo però che tutti essi realmente la premano, nè v' abbia alcuno sfiancamento nella parte Bn dell' Arco.

Si è in altro luogo provato, che fatta l' ascissa $B\pi = x$, l' ordinata $\pi n = y$, e la grossezza uniforme dell' Arco $= g$, diventa la pressione del cuneo $opzn$ sulla centina $= gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}$, nella qual formola A si trasforma in $\frac{g^2}{2}$ se la tangente al vertice B sia parallela all' ordinate; altrimenti A si determina facendo nel caso di $x = 0$ la quantità $gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A = 0$. Dunque la somma delle pressioni da B in z o in n sarà $= \int\left(gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}\right)$; ma ds è costante, laonde essa somma sarà $= gy + \frac{g^2 dx}{ds} - \int(gx+A)\frac{ddx}{dy}$; il che ecc. Prop. 2 di questo Corol 1

COROLLARIO.

E perchè si è ancora dimostrato essere lo spazio $opzn$, che esprime il peso del cuneo $opzn$, uguale a $gds + \frac{g^2 ddx}{2dy}$, ne segue che il peso assoluto di tutto l' Arco da B in n è $= \int\left(gds + \frac{g^2 ddx}{2dy}\right) = gs + \int\frac{g^2 ddx}{2dy}$; e però starà il peso assoluto dell' Arco da B in n alla somma delle pressioni ch' esercitano i cunei, che stanno sopra la centina Bn, come $gs + \int\frac{g^2 ddx}{2dy} : gy + \frac{g^2 dx}{ds} - \int(gx + A)\frac{ddx}{dy}$, nella qual ragione si sostituirà $\frac{g^2}{2}$ in luogo di A, quando la tangente al vertice B sia parallela all' ordinate, e si dovranno a ciascun termine aggiungere opportunamente le costanti. Prop. cit.

PROBLEMA II. PROPOSIZIONE II.

Determinare la ſomma delle preſſioni de' cunei ſulla centina in una parte di Arco circolare intero, o ſcemo.

Fig. III. Tav. IV. Sia CBH o ABG la centina di un Arco intero o ſcemo, ſopra la quale ſienvi ſtati poſti ſolamente da una parte i cunei dall' impoſtatura fino al punto I; e Q ſia altro punto ſulla centina preſo in modo che tutti i cunei ſuperiori da I fino in Q premano realmente la centina: biſogna determinare la ſomma delle preſſioni medeſime.

Si conduca la linea IK parallela alla ſaetta BR, e ſi ordini la QPM. Poi ſi faccia la $IP = x$, la $PQ = y$, la $IV = m$, la $BV = a$, e la $RB = b$ per avere l' equazione al cerchio CBH $(y + m)^2 = b^2 - (b - a - x)^2$, dalla quale ſi cava (come nella prop. 6 di queſto) $ds = \frac{bdx}{\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)}}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{b}\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)}$, e $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx}{\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)}}$. E poichè, fatta la groſſezza dell' Arco $= g$, la ſomma delle preſſioni da I fino in Q, che dico S, è $= gy + \frac{g^2 dx}{ds} - \int(gx +$ Prop. ant. $A)\frac{ddx}{dy}$, ſe ſi ſoſtituiſcano i valori di ds, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{ddx}{dy}$, e in vece di A la quantità $\frac{g^2(b - a)}{2b}$, a cui nella ſteſſa prop. 6 s' è dimoſtrata uguale, ſi conſeguirà $S = gy + \frac{g^2}{b}\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)} - \int\left(gx + \frac{g^2(b - a)}{2b}\right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)}} = gy + \frac{g^2}{b}\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)} - \int\frac{2bgx + bg^2 - ag^2}{2b^2} \cdot \frac{bdx}{\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)}}$
$= gy + \frac{g^2}{b}\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)} + \int\frac{gdx(b - a - x)}{\sqrt{(b^2 - (b - a - x)^2)}}$

$-\frac{(2bg+g^2).(b-a)}{2b^2}.\int\frac{bdx}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}$. Ma si ha $\int\frac{gdx(b-a-x)}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}=g\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}$, siccome ancora $\int\frac{bdx}{\sqrt{(b^2-(b-a-x)^2)}}=\int ds=s$; dunque $S=gy+\frac{g^2}{b}(y+m)+g(y+m)-s.\frac{(2bg+g^2).(b-a)}{2b^2}+B$, ch' è la costante da determinarsi. E perchè quando $x=0$ tutto dee svanire, e se $x=0$ diventa tanto l' ordinata y, che l' arco s uguali a zero; dunque $\frac{g^2m}{b}+gm+B=0$, e però $B=-\frac{g^2m}{b}-gm$; per conseguenza la somma delle pressioni da I in Q, cioè $S=2gy+\frac{g^2y}{b}-s.\frac{(2bg+g^2).(b-a)}{2b^2}=\frac{2bg+g^2}{2b^2}.(2by-s(b-a))$. Ovvero essendo $y=PQ$, $b-a=VR$, e $s=IQ$, sarà la somma S delle pressioni $=\frac{2bg+g^2}{2b^2}.(2b.PQ-IQ.VR)$; il che ecc.

COROLLARIO I.

E poichè s' è determinata la somma delle pressioni de' cunei che s' appoggiano sull' arco IQ, è manifesto, che quando il punto Q sia punto d' equilibrio dell' Arco CI o AI, presenterà la somma sopraccennata la massima somma delle pressioni che i cunei dell' Arco medesimo esercitano sulla centina; e ciò perchè tutti i cunei inferiori a Q non premono la centina, ma sfiancano. Il punto d' equilibrio poi dell' Arco CI o AI si ha facendo l' ascissa $IP=\frac{b-a}{2}=\frac{VR}{2}$; laonde posto che la MQ parallela alla corda seghi per mezzo la VR in M, se si cercherà il valore della PQ e quello dell' arco IQ, poi si sostituiscano nella formola $\frac{2bg+g^2}{2b^2}.(2b.PQ-IQ.VR)$, Prop. 6 di questo

si determinerà la somma delle pressioni di tutti i cunei dell' Arco CI o AI, i quali premono la centina.

COROLLARIO 2.

Quindi se l' Arco intero CBH, o lo scemo ABG sia tutto compiuto, cadrà il punto I in B, la PQ si cangierà in QM, la VR nel raggio $RB = b$, e l' arco IQ in BQ; dunque supposto che i cunei da B in Q premano la centina sarà la somma delle pressioni dal serraglio fino in Q, cioè $S = \frac{2bg+g^2}{2b^2}.(2b.QM - BQ.b) = \frac{2bg+g^2}{2b}.(2QM - BQ)$, vale a dire sarà uguale al prodotto di $\frac{2bg+g^2}{2b}$ nel doppio seno QM dell' arco BQ diminuito dell' arco medesimo BQ.

COROLLARIO 3.

Se tutto l' Arco intero CBH, o lo scemo ABG sia interamente compiuto, cioè se siano collocati tutti i cunei sulla centina, il punto d' equilibrio Q cadrà a due terzi del quadrante BC, e la QM sarà $= \frac{b}{2}\sqrt{3}$; e però fatto il quadrante $BC = q$, sarà la somma di tutte le pressioni da una parte della centina $= \frac{2bg+g^2}{2b}.\left(b\sqrt{3} - \frac{2q}{3}\right)$, e quella di ambe le parti $= \frac{2bg+g^2}{b}.\left(b\sqrt{3} - \frac{2q}{3}\right)$. Di nuovo perchè il raggio esteriore $RN = b + g$, sarà lo spazio $CBHEND$, o il peso di tutto l' Arco intero, $= \frac{(b+g)^2}{b}.q - bq = \frac{2bg+g^2}{b}.q$; dunque il peso di tutto l' Arco intero sta alla pressione da esso esercitata sulla centina, come $\frac{2bg+g^2}{b}.q : \frac{2bg+g^2}{b}.\left(b\sqrt{3} - \frac{2q}{3}\right)$, ovvero come $q : b\sqrt{3} - \frac{2q}{3}$, la qual proporzione ridot-

Prop. 5 di questo Corol. 2

ta in numeri s'approſſima di molto a quella del 9 al 4; dunque l' Arco intero *CBH* impiega quattro noni del ſuo peſo a premere la centina; e ſimilmente l' Arco ſcemo *ABG* impiegherà nella preſſione ſulla centina quattro noni del peſo ch' ei avrebbe, ridotto che foſſe alla ſua integrità. Ecco come con metodo analitico ſi è pervenuto a dimoſtrare quella ſteſſa verità che prima ſi era nel corol. 3 della prop. 14 del Libro II. con metodo ſintetico ritrovata.

PROBLEMA 12. PROPOSIZIONE 12.

In un Arco parabolico di uniforme groſſezza interamente coſtruito ritrovare la ſomma delle preſſioni di certa quantità di cunei ſuperiori ſulla centina.

Nell' Arco parabolico *FBG* ſi prenda l' aſciſſa $BC = x$, l'ordinata $CD = y$, e ſi ſupponga che il punto *D* non ſia inferiore al punto d' equilibrio dell' Arco parabolico, ſe pur ve ne ha: ſi domanda ora la ſomma delle preſſioni de' cunei collocati da una parte dell' Arco da *B* ſino in *D*. Fig. VII. Tav. IV.

Chiamato il parametro della parabola $= p$, $y^2 = px$ diventa l' equazione alla curva *FBG*, che differenziata dà $dy = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, $ds = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{p^2dx^2}{4px}\right)} = \frac{dx\sqrt{(4x+p)}}{2\sqrt{x}}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{(4x+p)}}$; laonde calcolando ſi troverà $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx\sqrt{px}}{x(4x+p)}$. Per il che eſſendo la ſomma delle preſſioni de' cunei da *B* ſino in *D*, che dico S, $= gy + \frac{g^2dx}{ds} - \int\left(gx + \frac{g^2}{2}\right)\frac{ddx}{dy}$, ſtante che la tangente al punto *B* è parallela all'ordinate, s' avrà, ſoſtituendo, $S = gy + 2g^2\sqrt{\frac{x}{4x+p}} - \int\left(gx + \frac{g^2}{2}\right) \cdot \frac{dx\sqrt{px}}{x(4x+p)}$: ma $px = y^2$, e $dx = \frac{2ydy}{p}$; dunque $gy + \frac{2g^2y}{\sqrt{(4y^2+p^2)}} - \int\left(\frac{gy^2}{p} + \frac{g^2}{2}\right)$. Prop. 10 di queſto

$\frac{2pdy}{4y^2+p^2} = gy + \frac{2g^2y}{\sqrt{(4y^2+p^2)}} - \int\left(\frac{2gy^2dy}{4y^2+p^2} + \frac{g^2pdy}{4y^2+p^2}\right) = gy$
$+ \frac{2g^2y}{\sqrt{(4y^2+p^2)}} - \int\left(\frac{gdy}{2} - \frac{gp^2dy}{2(4y^2+p^2)} + \frac{g^2pdy}{4y^2+p^2}\right) = gy +$
$\frac{2g^2y}{\sqrt{(4y^2+p^2)}} - \frac{gy}{2} - \int\frac{2g^2p - gp^2}{2}\cdot\frac{dy}{4y^2+p^2} = \frac{gy}{2} + \frac{2g^2y}{\sqrt{(4y^2+p^2)}}$
$+ \left(\frac{g}{2} - \frac{g^2}{p}\right)\cdot\int\frac{\frac{p^2}{4}dy}{y^2+\frac{p^2}{4}}$. E' poi noto pel calcolo integrale, che

$\int\frac{\frac{p^2}{4}dy}{y^2+\frac{p^2}{4}}$ è uguale all' arco di cerchio il cui raggio sia $\frac{p}{2}$, e

la tangente y, il qual arco chiamo $= D$; dunque $S = \frac{gy}{2} +$
$\frac{2g^2y}{\sqrt{(4y^2+p^2)}} + \left(\frac{g}{2} - \frac{g^2}{p}\right).D + C$. Per ritrovare il valore della costante C avverto, che quando x ovvero $y = 0$, debbe essere anche $S = 0$; ma fatta $y = 0$ l' equazione si converte in questa $C = 0$, svanendo tutti gli altri termini; e però sarà finalmente $S = \frac{gy}{2} + \frac{2g^2y}{\sqrt{(4y^2+p^2)}} + \left(\frac{g}{2} - \frac{g^2}{p}\right).D$, dove D significa l' arco di cerchio che ha $\frac{p}{2}$ per raggio, e per tangente y, ovvero $\sqrt{px}$; il che ecc.

Corollario.

E poichè $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx\sqrt{px}}{x(4x+p)} = \frac{2pdy}{4y^2+p^2} = \frac{2}{p}\cdot\frac{\frac{p^2}{4}dy}{y^2+\frac{p^2}{4}}$, sarà

$\int \frac{ddx}{dy}$ uguale a $\frac{2}{p}$ moltiplicato nell'arco di cerchio del raggio $\frac{p}{2}$ e della tangente y: ma questo arco si è chiamato D, dunque $\int \frac{ddx}{dy} = \frac{2D}{p}$, e $\int \frac{g^2 ddx}{2dy} = \frac{g^2 D}{p}$: la somma poi de' pesi assoluti de' cunei che sono addossati all' Arco parabolico da B in D s' è in altro luogo dimostrata $= gs + \int \frac{g^2 ddx}{2dy}$, dove s esprime la grandezza dell' arco BD; dunque essa somma sarà $= gs + \frac{g^2 D}{p}$, nè v' ha bisogno di aggiugnere costante, perchè tutto svanisce se x, ovvero y sia $= 0$; quindi sarà la somma de' pesi assoluti de' cunei che stanno sopra BD alla somma delle loro pressioni sulla centina come $gs + \frac{g^2 D}{p} : \frac{gy}{2} + \frac{2g^2 y}{\sqrt{(4y^2 + p^2)}} + \left(\frac{g}{2} - \frac{g^2}{p}\right) . D$. Corol. Prop. 10 di questo

PROBLEMA 13. PROPOSIZIONE 13.

Si domanda una maniera di formarsi una chiara idea delle pressioni, degli sfiancamenti, e de' punti d' equilibrio in un Arco dotato di qualsivoglia incurvamento interiore e di uniforme grossezza.

Sia $G\text{Æ}Q$ un Arco di qualunque curvatura riempiuto interamente di cunei, e sia l' ascissa $\text{Æ}B = x$, l'ordinata $BH = y$, e la grossezza uniforme dell' Arco $= g$; e si tiri la KI infinitamente prossima a BH. Fig. I. Tav. V.

E perchè si è dimostrato che la pressione o lo sfiancamento del cuneo KR è $= gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}$, e potendosi esprimere essa pressione o sfiancamento con una superficie, sia espressa dall' area infinitesima $BLPI$ della curva VLC la di cui ascissa sia la $\text{Æ}B$, e la BL l'ordinata; dunque chiamata Prop. 2 di questo e Scol.

l' ordinata BL di questa nuova curva $= Z$, essendo $ÆB = x$, e $BI = dx$, s' avrà l' area suddetta $BLPI = Zdx = gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}$; e però $Z = \frac{1}{dx}\left(gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}\right)$, nella qual equazione ds è costante, e la A diviene $= \frac{g^2}{2}$ se la tangente al punto $Æ$ sia all' ordinate parallela. Ma è nota la relazione tra x y, dunque si tolga co' soliti metodi dall' equazione medesima ds, dy, ddx, e sarà data un' altra equazione tra Z x, cioè sarà data l' equazione alla curva VLC, della quale converrà esaminare la natura e l' andamento.

Ora se la curva VLC continuata in MO intersecherà l' asse $ÆT$ in uno o più punti, per esempio ne' punti C D, tirate le ordinate CE DF, sarà segno certo che ne' punti E F v' ha altrettanti punti d' equilibrio dell' Arco $ÆG$; se la parte CMD di essa curva cada dall' altro lato della $ÆT$ o dal lato delle negative, vorrà dire che tutti i cunei tra E F sfiancano; se dopo D essa ritorna dal lato primiero, i cunei sotto F torneranno a premere la centina: ma se la curva incontrasse la $ÆT$ in uno o più punti C D senza far passaggio al lato opposto, vi sarebbero bensì uno o più punti d' equilibrio, ma non sfiancamenti di sorte: in somma l' andamento della curva $VLCMDO$ darà norma per conoscere i luoghi delle pressioni, e degli sfiancamenti, oltre i punti d' equilibrio dell' Arco $ÆG$. Similmente si troverà la natura e l' andamento della curva $uCmDo$ per l' Arco $ÆQ$; e se l' Arco $ÆQ$ non formasse coll' altro $ÆG$ che una sola curva, il di cui asse fosse la $ÆT$, è manifesto che la curva $uCmDo$ non sarebbe che un secondo ramo della prima $VLCMDO$, e ad essa uguale, simile, e similmente posta rispetto al loro asse comune $ÆT$; e così sarà risoluta in tutte le sue parti la proposta quistione.

Corollario I.

E perchè $Zdx = gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A) . \frac{ddx}{dy}$, sarà $\int Zdx = gy +$

$= gy + \frac{g^2 dx}{ds} - \int (gx + A) \frac{ddx}{dy}$; ma $\int Zdx =$ all'area *ÆNVLB*, o alla somma delle pressioni de' cunei da *Æ* in *H*, dunque $ÆNVLB = gy + \frac{g^2 dx}{ds} - \int (gx + A) \frac{ddx}{dy}$. E qui conviene fare qualche riflessione sul valore di essa area *ÆNVLB* espressa per una quantità integrale. Imperciocchè finchè la curva *VLC* cada dalla parte delle quantità positive l' espressione integrale $gy + \frac{g^2 dx}{ds} - \int (gx + A) \frac{ddx}{dy}$, presa per tal modo che tutto svanisca quando $x = o$, dinoterà certamente la somma delle pressioni sulla centina che succedono nell' Arco *ÆH*, cosicchè sostituendo dopo l' integrazione in luogo di x la *ÆC*, si troverà la somma di tutte le pressioni fino al punto d' equilibrio *E*. Ma se dopo il punto *E* i cunei sfiancassero e la curva *VLC* passasse dalla parte delle quantità negative come *CMD*, allora condotta da uno de' suoi punti l' ordinata *lbb*, e fatta $x =$ *Æb*, la quantità integrale $gy + \frac{g^2 dx}{ds} - \int (gx + A) \frac{ddx}{dy}$ tolta in maniera che tutto svanisca quando $x = o$, esprimerebbe la differenza dell' aree *ÆNVC Cbl*; e però se si amasse di avere la sola area *Cbl*, o la somma degli sfiancamenti da *E* in *b*, o le pressioni sulla sopraccentina, bisognerà prendere così la quantità integrale $gy + \frac{g^2 dx}{ds} - \int (gx + A) \frac{ddx}{dy}$, che fatta $x =$ *ÆC* tutto svanisca; e in tal guisa operando se nella quantità integrata in luogo di x si metta di poi la *ÆD*, otterrassi la somma di tutti gli sfiancamenti fra i due punti d' equilibrio *E F*. Similmente se la curva *VLCMD* facesse di nuovo passaggio dalla parte delle positive, e si volesse ritrovare la somma delle pressioni sotto il punto *F*, sarà d' uopo prendere la quantità integrale per modo che fatta $x =$ *ÆD*, tutto svanisca. Questo avvertimento, che pare essere solamente proprio per un Arco a cui corrisponda una curva *VCMDOuCmDo* di quell' andamento che si vede nella Figura, può facilmente applicarsi a qualsivoglia altro Arco, e alla sua conseguente

curva delle pressioni e degli sfiancamenti, che così si potrebbe ragionevolmente chiamare la curva $VCMDOuCmDo$.

COROLLARIO 2.

Fig. VI. Tav. IV. Sia per esempio l' Arco circolare intero ACG del raggio $CQ = b$ riempiuto di cunei fino al serraglio. E poichè la tangente al punto C è parallela all' ordinate, sarà $A = \frac{g^2}{2}$,

Prop. 5 di questo $dy = \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$, $\frac{ddx}{ds} = \frac{dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}}$, e $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$; quindi, fatta l' ordinata PR della curva delle pressioni e degli sfiancamenti $= Z$, essendo $Z = \frac{1}{dx}\left(gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} - (gx + A)\frac{ddx}{dy}\right)$, s' avrà $Z = \frac{g(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}} + \frac{g^2(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}} - \frac{2gx+g^2}{2\sqrt{(2bx-x^2)}} = (2b^2g - 2bgx + 2bg^2 - 2g^2x - 2bgx - bg^2) : 2b\sqrt{(2bx-x^2)} = \frac{2b^2g - 4bgx + bg^2 - 2g^2x}{2b\sqrt{(2bx-x^2)}}$. Ora esaminando la natura di questa equazione si troverà che la curva è composta di due rami HDF BDI uguali, simili, e similmente posti rispetto al loro asse comune CT, i quali fra di loro s' intersecano nel punto D dove $CD = \frac{b}{2}$. Se poi si prenda la $CT = 2b$, e dai punti C T si conducano le rette ML NO perpendicolari alla CT, saranno le rette ML NO assintoti de' rami medesimi dall' una parte e dall' altra. Ommettendo pertanto il ramo BDI che serve per li cunei che sono dalla parte del mezzo Arco CG, è evidente che il ramo HDF dimostra che i cunei da C in E premono la centina, perchè la curva da H in D cade dalla parte delle quantità positive; che in E v' ha un punto d' equilibrio, perchè la curva sega in D il suo asse; e che finalmente da E in A tutti i cunei sfiancano, avvegnachè la curva da D in giù cade dalla parte delle quantità negative. In oltre poichè $\int Zdx = gy + \frac{g^2 dx}{ds} -$

$\int\left(gx+\frac{g^2}{2}\right)\frac{ddx}{dy}$; e $gy+\frac{g^2dx}{ds}-\int\left(gx+\frac{g^2}{2}\right)\frac{ddx}{dy}$ si è provato uguale a $\frac{2bg+g^2}{2b}$ moltiplicato nel doppio seno *KP* dell' arco *CK* diminuito dell' arco medesimo *CK*; laonde ancora $\int Zdx$, ovvero l' area *MHRPC* sarà $=\frac{2bg+g^2}{2b}.(2KP-CX)$; e però la somma *MHDC* delle pressioni sino al punto d' equilibrio *E* sarà $=\frac{2bg+g^2}{2b}.(2ED-CE)$. Ma se x sia maggior di *CD* o di $\frac{b}{2}$, per esempio $=Cp$, la quantità $\frac{2bg+g^2}{2b}.(2kp-Ck)$ riuscirà uguale alla differenza dell' aree *MHDC Dpr*; cosicchè per conseguire la sola area *Dpr* bisognerà prendere l' integrale di $gy+\frac{g^2dx}{ds}-\int\left(gx+\frac{g^2}{2}\right)\frac{ddx}{dy}$ in modo che fatta $x=\frac{b}{2}$ tutto svanisca; ovvero per iscansare una nuova integrazione, poichè $MHDC=\frac{2bg+g^2}{2b}.(2ED-CE)$, e parimenti $MHDC-Dpr=\frac{2bg+g^2}{2b}.(2kp-Ck)$, sarà $Dpr=\frac{2bg+g^2}{2b}.(2ED-2kp-CE+Ck)=\frac{2bg+g^2}{2b}.(-2kV+Ek)$: conseguentemente la somma di tutti gli sfiancamenti de' cunei da *E* fino in *A* o la somma delle loro pressioni sulla sopraccentina sarà $=\frac{2bg+g^2}{2b}.(-2AX+EA)$.

Corol. 2 Prop. 11 di questo

PROBLEMA 14. PROPOSIZIONE 14.

Determinare le pressioni de' cunei sulla centina in un Arco di qualsivoglia curvatura e di non uniforme grossezza.

Fig. II. Tav. IV. Sia l' Arco $AB\Omega$ appoggiato alla centina $AB\Omega$ di qualsivoglia curvatura, ma non sia l' Arco di uniforme grossezza, e però sia data la curva esteriore dell' Arco medesimo, il quale sia riempiuto di cunei fino in B: si domanda la pressione sulla centina di un cuneo qualunque $opzn$.

Si supponga diviso l' Arco AB ne' suoi cunei infinitesimi, i primi quattro de' quali sieno quelli sulle basi BC CD DE EL; e di tutti i cunei fino allo $opzn$ si prendano i centri di gravità G H I K ecc. q, da cui si conducano le verticali GO HS IZ Kb ecc. qu proporzionali a' rispettivi pesi de' cunei, e si faccia il resto come nella proposizione 2 di questo.

Si dimostrerà come nella citata prop. che la spinta relativa qr del cuneo immediate superiore allo $opzn$ è uguale alla somma delle pressioni, che ogni cuneo eserciterebbe respettivamente sull' inferiore s' ei fosse il primo in ordine; e si dimostrerà ancora similmente che, prolungato il raggio $\mathcal{E}q$ in s, e condotta la rs perpendicolare alla commessura pz, il peso de' cunei superiori produce l' effetto di togliere dalla natural pressione $q\varphi$ del cuneo $opzn$ sulla centina una quantità uguale a qs; cosicchè la reale pressione del cuneo sulla centina è uguale a $q\varphi - qs$.

Ciò posto si faccia la $B\pi = x$, la $\pi n = y$, $\pi\delta = n\mu = dx$, $z\mu = dy$, $nz = ds$ e la grossezza no dell' Arco al punto n sia $= g$, esprimendo g una quantità variabile data in qualunque modo per le coordinate x y della curva $AB\Omega$. E poichè il raggio osculatore $n\mathcal{E}$ nell' ipotesi di ds costante trovasi $= \frac{dyds}{ddx}$, sarà $o\mathcal{E} = \frac{dyds}{ddx} + g$, la nz poi è $= ds$, dunque facendo come $n\mathcal{E} : o\mathcal{E} :: nz : op$, si troverà $op = ds + \frac{gddx}{dy}$; e però lo spazio $opzn$, ovvero la gravità qu del cuneo $opzn$, diventerà $= \frac{o\mathcal{E} . op}{2} - \frac{n\mathcal{E} . nz}{2} = \left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) . \left(\frac{ds}{2} + \frac{gddx}{2dy}\right) - \frac{dyds}{ddx} . \frac{ds}{2}$ $= gds + \frac{g^2ddx}{2dy}$. Di nuovo il triangolo $q\epsilon u$ essendo simile al triangolo $n\mu z$, s' avrà come $nz : n\mu :: qu : q\epsilon$, e come $nz : z\mu ::$

$qu : \varepsilon u (= q\varphi)$; e per conseguenza si determinerà la $q\varepsilon = gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}$, e la $q\varphi = gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds}$; il tutto come nella propos. citata.

Ora essendo la spinta relativa qr uguale alla somma di tutte le pressioni $q\varepsilon$, che da B fino in n eserciterebbe ogni cuneo sull' inferiore senza il carico de' superiori, sarà $qr = \int\left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}\right)$, dove non si può prendere l' integrale, come in essa prop., perchè g è quantità variabile, ma però sempre l' integrale dovrà torsi in modo che tutto svanisca nel caso di $x = 0$. In oltre essendo il triangolo $\mathcal{A}nz$ simile al triangolo rsq, e come $\mathcal{A}n : nz :: qr : qs$, ovvero $\frac{dyds}{ddx} : ds :: \int\left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}\right) : qs$, sarà $qs = \frac{ddx}{dy}\int\left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}\right)$: la $q\varphi$ poi s' è provata $= gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds}$; dunque $q\varphi - qs$, cioè la reale pressione qt del cuneo $opzn$ sulla centina, è $= gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds} - \frac{ddx}{dy}\int\left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}\right)$; il che ecc.

COROLLARIO I.

Conseguentemente nel punto d' equilibrio dovrà essere $gdy + \frac{g^2 ddx}{2ds} - \frac{ddx}{dy}\int\left(gdx - \frac{g^2 ddy}{2ds}\right) = 0$; ed ecco la formola che serve per trovare i punti d' equilibrio negli Archi di qualunque curvatura interiore ed esteriore.

COROLLARIO 2.

Ne segue ancora che se da B in n tutti i cunei premano la centina, sarà la somma delle loro pressioni sulla centina

medesima $= \int \left(g dy + \frac{g^2 ddx}{2ds} - \frac{ddx}{dy} \int \left(g dx - \frac{g^2 ddy}{2ds} \right) \right.$: e quì si rende manifesto il modo di determinare anche negli Archi di variabile grossezza la curva delle pressioni e degli sfiancamenti, come nella prop. antecedente si è fatto per quelli che sono di una costante grossezza forniti.

COROLLARIO 3.

Fig. II. Tav. V. Sia per esempio *ABCKIH* un Arco di non uniforme grossezza e costrutto in modo che la curva interiore *ABC* sia di figura semicircolare e del raggio $= b$; presa poi nella saetta *BF* l' ascissa $BD = x$, e l' ordinata $DE = y$, si unisca *FE* e si prolunghi in *G* facendo la $EG = \frac{1}{2} \sqrt{(bx + 5b^2)} - b$; e pe' punti *G* così determinati passi la curva esteriore dell' Arco: si domandano i punti d' equilibrio, se ve ne sono, e la quantità delle pressioni sulla centina.

E poichè l' equazione al semicerchio *ABC* è $2bx - x^2 = y^2$, sarà $dy = \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $ds = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $\frac{ddy}{ds} = \frac{-dx}{b}$, $\frac{ddx}{ds} = \frac{dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx - x^2)}}$, e $\frac{ddx}{dy} = \frac{dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$; ma $g = \frac{1}{2} \sqrt{(bx + 5b^2)} - b$, e $g^2 = \frac{bx}{4} + \frac{9b^2}{4} - b\sqrt{(bx + 5b^2)}$; laonde $\int \left(g dx - \frac{g^2 ddy}{2ds} \right) = \int \left(\frac{dx}{2} \sqrt{(bx + 5b^2)} - bdx + \frac{bxdx}{8b} + \frac{9b^2 dx}{8b} - \frac{dx}{2} \sqrt{(bx + 5b^2)} \right) = \int \left(\frac{b^2 dx}{8b} + \frac{bxdx}{8b} \right) = \frac{bx}{8} + \frac{x^2}{16}$, nella qual quantità integrata tutto svanisce quando $x = 0$. Per conseguenza $g dy + \frac{g^2 ddx}{2ds} - \frac{ddx}{dy} \int \left(g dx - \frac{g^2 ddy}{2ds} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{(bx + 5b^2)}$. $\frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{bdx(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}} + \frac{bxdx(b-x)}{8b\sqrt{(2bx - x^2)}} + \frac{9b^2 dx(b-x)}{8b\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{1}{2} \sqrt{(bx + 5b^2)} \cdot \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} \cdot \left(\frac{bx}{8} + \frac{x^2}{16} \right) =$

$$\frac{dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}\cdot\left(-b(b-x)+\frac{x}{8}(b-x)+\frac{9b}{8}(b-x)-\frac{bx}{8}-\frac{x^2}{16}\right)$$
$$=\frac{dx}{16\sqrt{(2bx-x^2)}}\cdot(2b^2-2bx-3x^2).$$

Premessi questi calcoli, perchè nel punto d' equilibrio debbe essere $gdy+\frac{g^2ddx}{2ds}-\frac{ddx}{dy}\int\left(gdx-\frac{g^2ddy}{2ds}\right)=0$, sarà in esso punto $\frac{dx}{16\sqrt{(2bx-x^2)}}\cdot(2b^2-2bx-3x^2)=0$, e però $2b^2-2bx-3x^2=0$, cioè $x^2+\frac{2b}{3}x=\frac{2b^2}{3}$; dalla qual equazione si ricava $x=-\frac{b}{3}+\frac{b}{3}\sqrt{7}$, ch' è una quantità reale, positiva, e minore della saetta $BF=b$; dunque presa sulla saetta BF l' ascissa $BD=-\frac{b}{3}+\frac{b}{3}\sqrt{7}$, poi condotta l' ordinata DE, s' avrà in E il punto d' equilibrio da una parte dell' Arco $ABCKIH$; e similmente quello si troverà dall' altra.

Di nuovo perchè la somma delle pressioni sulla centina corrispondenti all' ascissa x è generalmente $=\int\left(gdy+\frac{g^2ddx}{2ds}-\frac{ddx}{dy}\int\left(gdx-\frac{g^2ddy}{2ds}\right)\right)$, sarà essa somma nell' Arco $ABCKIH$ $=\int\frac{dx}{16\sqrt{(2bx-x^2)}}\cdot(2b^2-2bx-3x^2)=\int\frac{dx}{16\sqrt{(2bx-x^2)}}\cdot(8b^2-8bx+6bx-3x^2-6b^2)=\int\frac{bdx(b-x)}{2\sqrt{(2bx-x^2)}}+\frac{3}{16}\int dx\sqrt{(2bx-x^2)}-\frac{3}{4}\int\frac{b^2dx}{2\sqrt{(2bx-x^2)}}$: ma $\int dx\sqrt{(2bx-x^2)}=$ all' area BDE, e $\int\frac{b^2dx}{2\sqrt{(2bx-x^2)}}=$ al settore BFE; dunque la somma delle pressioni de' cunei da B fino in E è $=\frac{b}{2}\sqrt{(2bx-x^2)}$

$+ \frac{3}{16} . BDE - \frac{3}{4} . BFE = \frac{b}{2} \sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{3}{16} . BDE - \frac{3}{16} . BFE - \frac{9}{16} . BFE = \frac{b}{2} \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{3}{16} . EDF - \frac{9}{16} . BFE = \frac{b}{2} \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{3}{2 . 16} . (b - x) . \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{9}{16} . BFE$, o finalmente $= \frac{13b + 3x}{32} \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{9}{16} . BFE$, ſenza aggiunger coſtante all' integrale perchè tutto ſvaniſce quando $x = 0$. E ſe in queſta formola ſi ſoſtituiſca in luogo di x il valore $-\frac{b}{3} + \frac{b}{3}\sqrt{7}$ dell' aſciſſa corriſpondente al punto d' equilibrio, ſi troverà, dopo la ſoſtituzione, la ſomma di tutte quante ſono le preſſioni de' cunei da una parte dell' Arco *ABCKIH*.

E ſe ſi voleſſe determinare l' equazione alla curva eſteriore *HIK*, biſognerà operare così. Si conduca dal punto *G* la *GL* parallela alla *ED*, e ſi chiami l' aſciſſa *FL* della curva eſteriore $= u$, e l' ordinata $GL = z$. Pertanto eſſendo la $EG = \frac{1}{2} \sqrt{(bx + 5b^2)} - b$, ſarà tutta $FG = \frac{1}{2} \sqrt{(bx + 5b^2)}$, e la *DF* è $= b - x$; dunque facendo come $FE : FG :: DF : FL$, ovvero $b : \frac{1}{2} \sqrt{(bx + 5b^2)} :: b - x : u$, s' avrà $(b - x) . \sqrt{(bx + 5b^2)} = 2bu$, e quadrando, $(b - x)^2 . (bx + 5b^2) = 4b^2u^2$: ſimilmente la proporzione $FE : FG :: DE : GL$ darà, quadrando, l' altra equazione $(2bx - x^2) . (bx + 5b^2) = 4b^2z^2$, che aggiunta alla prima ſomminiſtra la terza $b^2(bx + 5b^2) = 4b^2u^2 + 4b^2z^2$, e però $bx + sb^2 = 4u^2 + 4z^2$, $x = \frac{4u^2 + 4z^2 - 5b^2}{b}$, e $b - x = \frac{6b^2 - 4u^2 - 4z^2}{b}$, ſiccome $(b - x)^2 = \left(\frac{6b^2 - 4u^2 - 4z^2}{b} \right)^2$.

In oltre poichè per la prima equazione $(b - x)^2 . (bx + 5b^2) = 4b^2u^2$, e s' è provato che $bx + 5b^2 = 4u^2 + 4z^2$, dunque

$(b - x)^2$.

$(b-x)^2 \cdot (4u^2 + 4z^2) = 4b^2u^2$, e $(b-x)^2 = \frac{b^2u^2}{u^2+z^2} = \left(\frac{6b^2 - 4u^2 - 4z^2}{b}\right)^2$, ch' è l' equazione fra le coordinate u z della curva esteriore.

S C O L I O.

Sarebbe stata difettosa questa nuova e generale Teoria delle pressioni de' cunei sulle centine, se non si fosse dichiarato il modo di adattarla anche agli Archi, che non sono di uniforme grossezza forniti.

Fine del Libro Quarto.



LIBRO QUINTO

DEGLI ARCHI DOTATI DI QUALSIVOGLIA INCURVAMENTO, DOPO DISARMATE LE CENTINE.

PROBLEMA I. PROPOSIZIONE I.

IN un Arco dotato di uniforme groſſezza ma di qualunque curvatura interiore, da cui ſia ſtata tolta la centina, ritrovare la differenza delle ſcambievoli preſſioni eſercitate da due cunei infiniteſimi contigui, ſenza però far conto del carico de' ſuperiori.

Fig. III. Tav. V. Sia *AmB* un Arco di qualſivoglia incurvamento interiore e di uniforme groſſezza, dal quale ſia ſtata tolta la centinatura. Sia poi eſſo eſternamente armato di ſopraccentine, e ſi prendano i due cunei infiniteſimi contigui *bLeZ ZeTa* ſopra baſi uguali *Le eT*; ſi domanda la differenza delle preſſioni che queſti cunei eſercitano fra di loro, non tenendo però conto delle preſſioni de' cunei ſuperiori e ſupponendoli come primi in ordine.

Dai punti *T e L* ſi conducano i raggi oſculatori *Tn eQ LQ* che concorrano inſieme ne' punti *n Q*; indi preſi i centri di gravità *C D* de' cunei ſuddetti, ſi conducano le linee verticali *CE DF* che ſiano in ragione de' loro riſpettivi peſi; poi, tirate le *CK DG* perpendicolari alle commeſſure *aT bL*, ſi uniſca *CD* e ſi compiano i parallelogrammi *CKEI DHFG*. Dinoterà *DH* la preſſione del cuneo ſuperiore *bLeZ* ſull' inferiore *ZeTa*, e reciprocamente *CI* la preſſione dell' inferiore ſul

ſuperiore: ora fa d'uopo eſprimere analiticamente la differenza tra eſſe *DH CI*.

Si tirino le ordinate *LO ef Tk*, poſcia le *Lg eu* parallele all'aſſe *mp*, e dal punto *T* la *TSN* parallela alla *CX*, e perpendicolare alla *eT*, come dal punto *L* la *SLq* parallela alla *DG*, e perpendicolare alla *bL*: ſarà dunque l'angolo *KCE* ovvero *CEI* uguale all'angolo *SNM*, e l'angolo *FDG* uguale all'angolo *OMq*. In oltre ſi finiſca la figura e ſi chiami al ſolito l'aſciſſa $mO = x$, l'ordinata $LO = y$, la groſſezza uniforme *bL* dell'Arco $= g$; e ſarà $Of = Lg = dx$, $eg = dy$, $fk = eu = dx + ddx$, $Tu = dy + ddy$; $Le = eT = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, e finalmente il raggio oſculatore *LQ* (nell'ipoteſi di *ds* coſtante) $= \frac{dyds}{ddx}$, o per facilità di calcolo $= z$, e però il raggio oſculatore $Tn = \frac{dyds}{ddx} + d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) = z + dz$. Per conſeguenza ſarà l'area del cunco *bLeZ* e il ſuo peſo $= gds + \frac{g^2 ds}{2z} = DF$, e quella dell'altro *ZeTa* e il ſuo peſo $= gds + \frac{g^2 ds}{2z + 2dz} = CE$, ovvero traſcurando gl'infiniteſimi di ordine ſuperiore al ſecondo $= gds + \frac{g^2 ds}{2z} - \frac{g^2 dsdz}{2z^2}$; dal che appariſce che i peſi de' due cunei differiſcono fra loro di una quantità infiniteſima del ſecondo ordine.

E perchè ſta come *eL* al ſeno tutto, così *eg* al ſeno dell'angolo *eLg*, cioè $ds : r :: dy : \text{sen.}\, eLg$, ſarà $\text{sen.}\, eLg = \frac{rdy}{ds}$; parimente eſſendo come $ds : r :: dx : \cos.\, eLg$, ſarà $\cos.\, eLg = \frac{rdx}{ds}$. E perchè $(SQ)^2 = (LQ)^2 + (SL)^2$, e SL è $= Le = ds$, riuſcirà $SQ = \sqrt{(z^2 + ds^2)} = z + \frac{ds^2}{2z}$, e però $Se = SQ - Qe = \frac{ds^2}{2z}$; laonde riſolvendo il triangolo *SLe* ſi troverà sen. $SLe =$

$\frac{rds}{2z}$, e cos. $SLe = r$. Per conseguenza dati i seni e i coseni degli angoli SLe eLg, sarà anche dato il seno della loro somma SLg, ovvero LMO, e sarà $= \frac{rdy}{ds} + \frac{rdx}{2z}$. Di nuovo la risoluzione del triangolo eTu somministrerà sen. $eTu = \frac{rdx}{ds} + \frac{rddx}{ds}$, e cos. $eTu = \frac{rdy}{ds} + \frac{rddy}{ds}$: ma la Sn sarà $= \sqrt{((Tn)^2 + (ST)^2)} = \sqrt{((z + dz)^2 + ds^2)} = z + dz + \frac{ds^2}{2z + 2dz}$; e però la rimanente $Se = \frac{ds^2}{2z + 2dz}$; e qui per maggior chiarezza avverto che il punto dove la TS perpendicolare alla aT concorre con Zn non è lo stesso del punto dove la LS perpendicolare alla bL sega essa Zn, ma ciò non ostante per non confondere la Figura si sono amendue posti in S, nel calcolo poi se ne marca la differenza. Oltre a ciò risolvendo il triangolo STe si troverà sen. $STe = \frac{rds}{2z + 2dz}$; e cos. $STe = r$. Dati pertanto i seni e i coseni degli angoli STe eTu, sarà il coseno della loro somma STu, cioè il seno di $TNO = \frac{rdy}{ds} + \frac{rddy}{ds} - \frac{rdx + rddx}{2z + 2dz}$. E' manifesto ancora che sen. $LQe =$ sen. $HDG = \frac{rds}{z}$, e sen. $Tne =$ sen. $KCI = \frac{rds}{z + dz}$.

Equaz. I. Prop. 7 Lib. I.

Equaz. III.

Ciò posto perchè come $DF : DH ::$ sen. HDG : sen. $FDG =$ sen. $OMq =$ sen. LMO, sarà sostituendo $gds + \frac{g^2ds}{2z} : DH :: \frac{rds}{z} : \frac{rdy}{ds} + \frac{rdx}{2z}$, dunque $DH = (gds + \frac{g^2ds}{2z}) . (\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dx}{2ds})$. In simil guisa essendo $CE : CI ::$ sen. KCI : sen. KCE ($=$ sen. TNO), s' avrà in lettere $gds + \frac{g^2ds}{2z} - \frac{g^2dsdz}{2z^2} : CI :: \frac{rds}{z + dz} : \frac{rdy}{ds} + \frac{rddy}{ds} -$

$\frac{rdx + rddx}{2z + 2dz}$, laonde $CI = \left(gds + \frac{g^2ds}{2z} - \frac{g^2dsdz}{2z^2}\right).\left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{zddy}{ds^2} + \frac{dydz}{ds^2} + \frac{dzddy}{ds^2} - \frac{dx + ddx}{2ds}\right)$, cioè, ommettendo nel secondo moltiplicatore i termini infinitesimi, sarà $CI = \left(gds + \frac{g^2ds}{2z} - \frac{g^2dsdz}{2z^2}\right).\left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{zddy}{ds^2} + \frac{dydz}{ds^2} - \frac{dx}{2ds}\right)$; quindi la ricercata differenza tra le pressioni DH CI sarà $= \left(gds + \frac{g^2ds}{2z}\right).\left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dx}{2ds}\right) - \left(gds + \frac{g^2ds}{2z} - \frac{g^2dsdz}{2z^2}\right).\left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{zddy}{ds^2} + \frac{dydz}{ds^2} - \frac{dx}{2ds}\right)$ $= gdx + \frac{g^2dx}{2z} - \frac{gzddy}{ds} - \frac{g^2ddy}{2ds} - \frac{gdydz}{ds}$ negletti gl' infinitesimi di secondo ordine: ma perchè ds è costante sarà differenziando l' equazione $dy^2 + dx^2 = ds^2$, $dyddy + dxddx = 0$, e $ddy = \frac{-dxddx}{dy}$, laonde $-\frac{gzddy}{ds} = \frac{-g}{ds}.\frac{dyds}{ddx}.\frac{-dxddx}{dy} = gdx$, e $+\frac{g^2dx}{2z} = g^2dx : \frac{2dyds}{ddx} = \frac{g^2dxddx}{2dyds} = \frac{-g^2ddy}{2ds}$; dunque finalmente $DH - CI = 2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$; il che ecc.

COROLLARIO.

E poichè come DF a DH, così il seno dell' angolo infinitesimo LQe al seno dell' angolo finito FDG; e il seno dell' angolo LQe è infinitamente minore del seno dell' angolo FDG; dunque sarà pure DF infinitamente minore di DH: ma la DF che rappresenta la gravità del cuneo $bLeZ$ è un infinitesimo del primo ordine, dunque DH è una quantità finita. Similmente si proverà CI quantità finita; ciò nulla ostante la differenza tra le DH CI, testè ritrovata, diventa uguale a una quantità infinitesima del primo ordine perchè

le quantità finite si distruggono nella sottrazione scambievolmente tra di loro. E siccome allo stesso modo si possono provare finite anche le quantità *DG CK*, così sarà vero in generale, che le gravità de' cunei, quantunque infinitesime, dividendosi nelle forze laterali che abbiano le loro direzioni perpendicolari alle commessure, danno nella divisione forze finite: bisogna però eccettuare il solo caso in cui la commessura inferiore riesca orizzontale, perchè allora non può dividersi la gravità del cuneo, ma s' impiega tutta, infinitesima com' è, a premere il piano sottostante secondo una direzione verticale. La *DH* poi per le cose trovate nella prop. sarà, ommettendo gl' infinitesimi, uguale alla quantità finita $\frac{gzdy}{ds} + \frac{g^2dy}{2ds} = \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds}$; e ad essa quantità si troverà facilmente uguale anche la *HF* o la *DG*, che dalla *HD* non differisce che di una quantità infinitesima.

PROBLEMA 2. PROPOSIZIONE 2.

Ritrovare la differenza delle pressioni esercitate fra di loro da due cunei infinitesimi di un Arco di qualunque curvatura interiore ed esteriore, dal quale sia stata levata la centina, non contando come nell' antecedente le pressioni de' cunei superiori.

Fig. V. Tav. V. Nell' Arco *ALm* di qualunque curvatura interiore ed esteriore bisogna trovare le differenze delle pressioni fra i due cunei infinitesimi *bLeZ ZeTa*, dopo disarmata la centina.

Si faccia la stessa costruzione dell' antecedente, e di più essendo la grossezza *Lb* quantità variabile, col centro *Q* e intervallo *Qb* si descriva l' archetto *bq*, e col centro *n* intervallo *nq* l' altro archetto *qt*.

Prese le solite denominazioni si troverà come nella citata proposizione l' area $bLeq = gds + \frac{g^2ds}{2z}$, e l' area $qeTt = gds$

$+ \frac{g^2ds}{2z} - \frac{g^2dsdz}{2z^2}$. Ed è manifesto che la differenza qZ tra le Lb eZ diventerà $= dg$, ed $eZ = g + dg$, e così la differenza tra le eZ Ta sarà $= dg + ddg$, e per conseguenza la differenza at tra la prima Lb e la terza Ta sarà $= 2dg + ddg$. Ora se si faccia come $QL : Qb :: Le : bq$, ovvero $z : z + g :: ds : bq$, si avrà $bq = ds + \frac{gds}{z}$; e però il triangolo $bqZ = \frac{dg}{2} . \left(ds + \frac{gds}{z} \right) = \frac{dsdg}{2} + \frac{gdsdg}{2z}$. Similmente, escludendo gl' infinitesimi del terzo ordine, si troverà il trapezoide $Zqta = \frac{3dsdg}{2} + \frac{3gdsdg}{2z}$. Aggiugnendo pertanto allo spazio $bLeq$ il triangolo bqZ, e allo spazio $qeTt$ il trapezoide $Zqta$, si conseguirà l' intero spazio $bLeZ = DF = gds + \frac{g^2ds}{2z} + \frac{dsdg}{2} + \frac{gdsdg}{2z}$, e lo spazio $ZeTa = gds + \frac{g^2ds}{2z} - \frac{g^2dsdz}{2z^2} + \frac{3dsdg}{2} + \frac{3gdsdg}{2z}$. Risolvendo poi i parallelogrammi $DHFG$ $CKEI$ si conoscerà il lato DH $= \left(gds + \frac{g^2ds}{2z} + \frac{dsdg}{2} + \frac{gdsdg}{2z} \right) . \left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dx}{2ds} \right)$, e il lato CI $= \left(gds + \frac{g^2ds}{2z} - \frac{g^2dsdz}{2z^2} + \frac{3dsdg}{2} + \frac{3gdsdg}{2z} \right) . \left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{zddy}{ds^2} + \frac{dydz}{ds^2} - \frac{dx}{2ds} \right)$; e però la differenza ricercata fra le pressioni DH CI sarà (ommettendo gl' infinitesimi superiori) $= gdx + \frac{g^2dx}{2z} + \frac{g^2dydz}{2zds} - \frac{gzddy}{ds} - \frac{g^2ddy}{2ds} - \frac{gdydz}{ds} - \frac{g^2dydz}{2zds} - \frac{zdydg}{ds} - \frac{gdydg}{ds}$, e riducendo come nell' antecedente, sarà essa differenza $= 2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}$; il che ecc.

COROLLARIO.

Per conseguenza, ommettendo i termini infinitesimi, sarà la $DH = \frac{gzdy}{ds} + \frac{g^2dy}{2ds} = \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds}$, ch' è la quantità medesima ritrovata pel caso in cui l'Arco sia di uniforme grossezza; dunque generalmente la pressione DH del cuneo superiore sull' inferiore negli Archi di uniforme o non uniforme grossezza e di qualsivoglia curvatura interiore sarà espressa dalla quantità sopraddetta.

Corol. dell' ant.

PROBLEMA 3. PROPOSIZIONE 3.

Data la saetta e la corda di un Arco di qualsivoglia curvatura interiore ed esteriore, e data l' altezza e la grossezza de' pilastri, trovare il momento della differenza delle pressioni, che eserciterebbero due cunei contigui fra di loro senza il carico de' superiori.

Fig. III. Tav. V.

Sieno $bLeZ$ $ZeTa$ due cunei contigui nell'Arco AmB, il quale sia primieramente dotato di uniforme grossezza; e si divida al solito la gravità DF del cuneo $bLeZ$ nelle due forze DH DG, e la gravità CE del cuneo $ZeTa$ nelle due CI CK: poi in direzione della DC si prenda Cc uguale alla differenza delle DH CI. Sia poi R il punto estremo del pilastro vicino AR: bisogna trovare il momento di Cc.

Si prolunghi la DC in V, e dal punto R si conduca la RV perpendicolare alla DV: il prodotto di Cc per RV dinoterà il momento ricercato: resta dunque da esprimere analiticamente esso prodotto.

Si tirino dal punto Q le Qd QP, l'una perpendicolare alla mb, l' altra alla mb parallela: si prolunghi di poi la RY (quand' occorra) nel punto X. Si faccia in oltre $mO = x$, $OL = y$, $Of = Lg = dx$, $eg = dy$, $Le = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, la grossezza uniforme Lb dell' Arco $= g$: sarà il raggio osculatore

tore $LQ = \frac{dyds}{ddx}$, e il triangolo QLP simile al triangolo eLg darà il co-raggio $LP = \frac{dxdy}{ddx}$, e il co-raggio $PQ = \frac{dy^2}{ddx}$. Finalmente si chiami la saetta $mp = n$, la semicorda $Ap = b$, l' altezza YR del pilastro $= a$, e la sua grossezza $AY = G$: sarà per le cose dimostrate la differenza Ce tra le forze DH CI nell' Arco AmB di uniforme grossezza $= 2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$. Prop. 1 di questo

E perchè $LQ = \frac{dyds}{ddx}$, $Lb = g$, e l' angolo eQL al centro del cuneo $bLeZ$ è infinitamente picciolo, sarà la distanza $QD = \left(\frac{6dy^2ds^2}{ddx^2} + \frac{6gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right)$. Di nuovo non differendo l' angolo retto dall' angolo QDd che dell' angolo infinitesimo DQZ, sarà l' angolo QDd uguale all' angolo retto egL; similmente non differendo l' angolo DQd dall' angolo LQd che dell' angolo infinitesimo DQL, sarà l' angolo DQd uguale all' angolo LQd, o all' alterno PLQ, cioè all' angolo eLg; dunque il triangolo QDd è simile al triangolo egL, e come $Lg . Le :: QD . Qd$, ovvero come $dx . ds :: \left(\frac{6dy^2ds^2}{ddx^2} + \frac{6gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) . Qd$; e per conseguenza sarà $Qd = \left(\frac{6dy^2ds^3}{dxddx^2} + \frac{6gdyds^2}{dxddx} + \frac{2g^2ds}{dx}\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right)$. Oltre a ciò perchè $pb = mO + PQ - mp$, sarà pb o $Yr = x + \frac{dy^2}{ddx} - n$; ma la $YR = a$, dunque la rimanente $Rr = a - x - \frac{dy^2}{ddx} + n$: così essendo $Yp = rb = Ya + Ap = G + b$, e $PO = LO - LP = y - \frac{dxdy}{ddx} = bQ$, sarà la rimanente $Qr = G + b - y + \frac{dxdy}{ddx}$; Corol 2 Prop. 9 Lib. I.

e però sottratto il valore di Qr dal valore di Qd superiormente determinato, s' avrà $dr = \left(\frac{6dy^2ds^2}{dxddx^2} + \frac{6gdyds^2}{dxddx} + \frac{2g^2ds}{dx}\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) - G - b + y - \frac{dxdy}{ddx}$.

Di nuovo ancora essendo la Xd parallela alla Le, la Xr alla Lg, e la dr alla eg, sarà il triangolo Xdr simile al triangolo Leg, e però come $eg : gL :: dr : rX$, dunque sostituendo sarà $rX = \left(\frac{6dyds^2}{ddx^2} + \frac{6gds^2}{ddx} + \frac{2g^2ds}{dy}\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) - \frac{dx^2}{ddx} - \frac{dx}{dy}(G + b - y)$, e aggiunta la Rr, sarà tutta $XR = \left(\frac{6dyds^2}{ddx^2} + \frac{6gds^2}{ddx} + \frac{2g^2ds}{dy}\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) - \frac{dx^2}{ddx} - \frac{dy^2}{ddx} + a + n - x - \frac{dx}{dy}(G + b - y) = \left(\frac{3gds^2}{ddx} + \frac{2g^2ds}{dy}\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + a + n - x - \frac{dx}{dy}(G + b - y)$. Per fine il triangolo XVR simile al triangolo Xrd o al triangolo Lge ci darà l' analogia $Le : eg :: XR : RV$, da cui si ricaverà la $RV = \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)$: laonde il momento di Cc d' intorno al punto R sarà $= \left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right) . \left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)\right)$.

Fig. V. Tav. V. Ed è manifesto ancora, che se l' Arco Am non sia di uniforme grossezza, ma di qualsivoglia curvatura esteriore, essendo in questo caso la differenza $Cc = 2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}$, e restando la perpendicolare RV

Prop. 2 di questo

espressa come nel caso primo, sarà il momento di $Cc =$
$\left(2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right) \cdot \left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)\right)$;
dalla qual formola, fatta g costante e $dg = 0$, si ricava la prima formola indicante il momento di Cc quando l' Arco sia di uniforme grossezza; e però ecc.

C o r o l l a r i o .

Dunque essendo negli Archi di qualunque curvatura interiore ed esteriore la perpendicolare RV condotta dal punto estremo R del pilastro sulla direzione $DV = \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)$; ed essendosi dimostrato che la pressione DH del cuneo superiore sull' inferiore è $= \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2 dy}{2ds}$; sarà il momento di essa pressione $DH = \left(\frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2 dy}{2ds}\right) \cdot \left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)\right)$, e riducendo $= \frac{g^2 dy^2}{2ddx} + \frac{g^3 dy}{3ds} + \left(\frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2 dy}{2ds}\right) \cdot \left(\frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)\right)$.

Fig. V.

Corol. Prop. 1 di questo

PROBLEMA 4. PROPOSIZIONE 4.

Ritrovare lo sfiancamento de' cunei in un Arco dotato di qualsivoglia curvatura interiore ed esteriore, da cui sia stata tolta la centina.

In un Arco, di cui ABC è la curva interiore e KHD l' esteriore, sia IK un cuneo infinitesimo: fa d' uopo ritrovare lo

Fig. IV. Tav. V.

sfiancamento del cuneo *IK* dopo disarmata la centina, vale a dire la sua pressione sulla sopraccentina.

Sieno *DE EF FG GH* ecc..... *OI IK KA* i cunei infinitesimi componenti l' Arco fino al contiguo inferiore ad *IK*; e si prendano i loro centri di gravità *W V a e φ* ecc.... *k P μ*, e si unifcano le linee *WV Va ae eφ* ecc..... *kP Pμ*; poi si prolunghino una dopo l' altra facendo i prolungamenti *VX am en φδ* ecc..... *Pl με* uguali alla differenza con cui li cunei superiori premono gl' inferiori contigui più di quello sieno da essi premuti secondo il senso delle due prime prop. di questo Libro; cioè sia la *VX* uguale alla differenza delle pressioni esercitate da' cunei *DE EF* fra di loro; *am* uguale alla differenza delle pressioni fra i cunei *EF FG*, facendo sempre astrazione da' superiori, e come se fossero i primi in ordine; *en* uguale alla differenza fra le pressioni de' cunei *FG GH*, e così in appresso, finchè *Pl* sia uguale alla differenza delle pressioni de' cunei *OI IK*, e *με* a quella de' cunei *IK KA*. Finalmente da' punti *E Æ I M* si conducano i raggi osculatori *ET ÆT IΩ MΩ*, e si congiungano le *TV ΩP*.

E poichè la direzione della forza *VX* con cui il secondo cuneo *EF* preme il terzo è inclinata alla loro comune commessura *FÆ*, il cuneo *EF* non potrebbe restare nella sua rispettiva posizione senza l' appoggio della sopraccentina; quindi prolungata la *TV* in *Y* e compiuto il parallelogrammo *VYXZ*, esprimerà *VY* lo sfiancamento del cuneo *EF*, e *VZ* insieme con *am* la sua spinta relativa sul cuneo inferiore *FG*. Di nuovo perchè l' angolo *ZVY* è uguale all' angolo *WVT*, l' angolo poi *ZVT* è uguale all' interiore *XYV*, e l' angolo *WVT* all' opposto al vertice *XVY*, sarà l' angolo *XYV* uguale all' angolo *XVY*, e però la *XY* o la *VZ* è uguale alla *XV*: laonde fatta la *mc* uguale alla *VX*, sarà tutta *ac* la spinta relativa del cuneo medesimo *EF*, o la forza con cui esso realmente preme il cuneo *FG* spignendolo contro l' altro *GH*. Ma questa forza opera per una direzione *ac* inclinata alla comune commessura de' cunei *FG GH*; e perciò condotta dal punto *a* al centro dell' archetto *GÆ* una linea retta e prolungata fino in *b*, indi compiuto il parallelogrammo *abcd*, dinoterà *ab* la pressione del cuneo *FG* sulla sopraccentina o il suo sfiancamento, e *ad* insieme con *en* la sua spinta relativa. Nello

ſteſſo modo poi col quale ſi è dimoſtrata la *VX* uguale alla *VZ* ſi proverà ancora la *ac* uguale alla *ad*; dunque la ſpinta relativa del cuneo *FG* è uguale ad *ac* con *en*, ovvero alla ſomma delle *VX am en*. Similmente fatta la *nf* uguale alla *ac* o alla ſomma delle *VX am*, e compiuto il parallelogrammo *ebfg*, ſi dimoſtrerà che *eb* eſprime lo sfiancamento del cuneo *GH*, e che la ſua ſpinta relativa è uguale alla ſomma delle *VX am en φδ*, e così ſucceſſivamente.

Per la qual coſa fatta la *PR* uguale alla ſomma delle *VX am en φδ* ecc..... *Pl*, e prolungata la *ΩP* in *Q*, ſe ſi termini il parallelogrammo *PQRS*, dinoterà *PQ* lo sfiancamento del cuneo propoſto *IK*, e la ſomma delle *PS με* o la ſomma delle *VX am en φδ* ecc..... *Pl με* moſtrerà la ſpinta relativa del cuneo medeſimo. E perchè gli angoli *RPS SPk* ſono uguali a due retti, ſaranno eſſi uguali agli angoli *SPk MΩI*, e tolto il comune *SPk*, reſterà l' angolo *RPS* o il ſuo alterno *PRQ* uguale all' angolo *MΩI*, laonde il triangolo iſoſcele *MΩI* è ſimile al triangolo iſoſcele *PRQ*, e come *ΩM* a *MI*, così ſarà *PR* a *PQ*.

Sicchè fatta $BL = x$, $IL = y$, $LN = Ip = dx$, $Mp = dy$, $IM = ds$, la groſſezza variabile dell' Arco in $I = g$, e il raggio oſculatore $\Omega M = \frac{dyds}{ddx}$, eſſendo la *Pl*, o la differenza delle preſſioni de' cunei *OI IK* fra di loro ſenza tener conto de' cunei ſuperiori, $= 2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}$, ſarà la *PR* o la ſomma delle *VX am en φδ* ecc..... *Pl* Prop. 2 di queſto

$$= \int \left(2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds} \right) = PR; \text{ ma}$$

ſi è dimoſtrato che come $\Omega M : MI :: PR : PQ$; ovvero $\frac{dyds}{ddx} : ds :: PR : PQ$; per conſeguenza lo sfiancamento *PQ* del cuneo *IK* ſarà $= \frac{ddx}{dy} \int \left(2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds} \right)$; il che ecc.

COROLLARIO I.

Finchè i cunei sono infinitamente prossimi al punto B e l' ascissa x infinitesima, gli sfiancamenti VT ab ecc. sono infinitesimi del secondo ordine; ma quando l' ascissa x sia finita, come si suppone la BL, lo sfiancamento PQ del cuneo IK diventa infinitesimo del primo ordine. Imperciocchè qual ragione ha la $T\text{Æ}$ alla ÆE, la stessa ha ancora la XV alla VT; ma la $T\text{Æ}$ alla ÆE ha la ragione della quantità finita all' infinitesima di primo ordine, dunque essendo la XV quantità infinitesima del primo ordine, sarà la VT infinitesima del secondo; e la stessa dimostrazione vale per tutti gli altri cunei al punto B infinitamente prossimi. Ma se la BL sia finita, allora si dimostrerà similmente essere la PR alla PQ nella ragione della quantità finita all' infinitesima di primo ordine, la PR poi, come uguale ad una somma infinita delle quantità VX am en $\varphi\delta$ ecc..... Pl del primo ordine, è quantità finita; laonde PQ è infinitesima dell' ordine primo, come si doveva dimostrare.

COROLLARIO 2.

Si è dimostrato che la spinta relativa del cuneo IK è uguale alla somma di PS e di $\mu\varsigma$, ma PS è uguale a PR cioè alla somma di VX am en $\varphi\delta$ ecc..... Pl, e $\mu\varsigma$ è una quantità infinitesima, dunque la spinta relativa del cuneo IK è uguale a PR o alla somma delle VX am en $\varphi\delta$ ecc. $Pl =$ $\int\left(2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydz}{ds}\right)$. Così di ogni cuneo fuorchè della mossa, dove bisognerà operare in altro modo per conseguire la spinta relativa. Sia per esempio AX la mossa, e si tiri la verticale $\mu\varepsilon$ dinotante il suo peso, e la μt perpendicolare all' impostatura $A\pi$: è chiaro pertanto che presa εs uguale a PR, o alla somma delle VX am en $\varphi\delta$ ecc.....Pl, e compiuto il parallelogrammo μrst, poi l' altro $\mu\Gamma\varepsilon u$, si avrà in μr lo sfiancamento, e nella somma delle μt $\mu\Gamma$ la spinta relativa della mossa; delle quali la $\mu\Gamma$ non è trascurabile che nel solo caso in cui l' impostatu-

ra sia orizzontale, riuscendo allora infinitesima di grandezza ed uguale al peso $\mu\varepsilon$ della mossa stessa. Per il che essendo la pressione $\mu\Gamma = \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds}$, e la $\mu t = \mu s = ts = PR =$ Corol. Prop. 1 di questo
$\int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right)$, sarà la spinta relativa della mossa $= \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds} + \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds}\right.$ $\left. - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right)$, dove converrà, dopo l' integrazione, fare l' ascissa x uguale alla saetta dell' Arco.

COROLLARIO 3.

E se vi fosse una forza $= q$ che si unisce alla VX del serraglio per premere secondo la direzione medesima il primo cuneo EF, allora le differenze VX am en ecc. s' ingrandirebbero ciascuna della quantità q, e però anche PR riuscirebbe uguale a q unita alle stesse quantità VX am en $o\delta$ ecc.... Pl, e sarebbe $= q + \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \right.$ $\left.\frac{gdydg}{ds}\right)$. Per conseguenza l' analogia di $\Omega M : MI :: PR : PQ$ somministrerebbe nel caso suddetto lo sfiancamento $PQ =$ $\frac{qddx}{dy} + \frac{ddx}{dy}\int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right)$.
La spinta poi relativa di tutti i cunei senza la mossa riuscirebbe $= q + \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right)$, e quella della mossa diventerebbe $= \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds} + q + \int\left(2gdx\right.$ $\left. - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right)$ facendo dopo l' integrazione x uguale alla saetta dell' Arco.

PROBLEMA 5. PROPOSIZIONE 5.

Data la curvatura interiore ed efteriore di un Arco da cui fia ftata difarmata la centina, e date la faetta e la corda coll' altezza e grosfezza de' pilaftri, ritrovare la fomma de' momenti di tutte le forze che cercano rovefciare i pilaftri medefimi.

Fig. IV. Tav. V. Sia ABC un Arco difarmato delle fue centine, e di qualfivoglia incurvamento interno ed efterno, e AZ il fuo pilaftro: bifogna trovare la fomma de' momenti delle forze impiegate contro il pilaftro AZ.

Si divida l' Arco dalla fommità fino alla moffa AK ne' fuoi cunei infinitefimi, e fi determinino gli sfiancamenti VY ab cb ecc..... ki PQ μr, o le preffioni loro fulla fopraccentina, l' ultima delle quali μr fia quella della moffa. Sieno poi le VX am cn $\varphi\delta$ ecc...... Pl $\mu\varepsilon$ quelle linee ch' efprimono la differenza delle preffioni che due cunei contigui eferciterebbero fra di loro fenza il carico de' fuperiori e fe foffero i primi in ordine; e la gravità $\mu\varepsilon$ della moffa fi divida nelle due forze laterali $\mu\Gamma$ μu che abbiano le loro direzioni $\mu\Gamma$ μu perpendicolari una all' impoftatura $A\pi$, l' altra alla linea KM. Dunque per le cofe dimoftrate nell' antecedente farà la fpinta relativa del ferraglio DE uguale a VX, quella del primo cuneo EF uguale alla fomma delle VX am cioè alla ac, quella del cuneo $FG = VX + am + cn = cf$, e così fucceffivamente, ficchè la fpinta relativa del cuneo OI farà $= VX + am + cn + \varphi\delta$ ecc.... $+ kx + Pl = PR$, quella del cuneo $IK = VX + am + cn + \varphi\delta$ ecc..... $+ kx + Pl + \mu\varepsilon = \mu s = \mu t$, e per fine la fpinta relativa della moffa farà $= \mu s + \mu\Gamma$, delle quali la $\mu\Gamma$ è folo trafcurabile quando l' impoftatura $A\pi$ fia orizzontale. Sia pertanto effa impoftatura in primo luogo orizzontale: s' avrà dunque in μs o in μt la fpinta relativa della moffa, e fuppongafi altresì che la direzione μt prolungata paffi fuori della bafe del pilaftro.

Le gravità dunque de' cunei dalla fommità alla moffa divife

vise nelle forze laterali, e maneggiate col solito metodo si riducono a dare gli sfiancamenti *VY ab eb* ecc.... *ki PQ μr*, o le pressioni de' cunei sulla sopraccentina, e resta in oltre la spinta relativa *μt* della mossa sul pilastro. Le prime forze tendono manifestamente in ogni caso a rovesciare il pilastro d' intorno al punto *z*, e nella presente supposizione, che la direzione *μt* prolungata cada fuori della base, anche la forza *μt* tende all' effetto medesimo; quindi sarà sciolto il Problema se si potrà determinare la somma de' momenti di tutte le forze soprammentovate. Ora poichè la somma de' momenti delle forze *μt μr* operanti per le direzioni *μt μr* d' intorno al punto *z* è uguale al momento della forza composta *μs* per la direzione *μs*, e la *μs* è uguale alle *με εs* cioè alle *με PS*, saranno i momenti delle forze *μt μr* uguali a' momenti delle forze *με PS*; e aggiunto da ambe le parti il momento di *PQ*, si avranno i momenti delle forze *μt μr PQ* uguali ai momenti delle *με PS PQ*. Ma i momenti delle *PS PQ* d' intorno al punto *z* sono uguali al momento della forza composta *PR*, cioè delle forze *Pl lR*, ovvero *Pl ko*; laonde i momenti delle forze *μt μr PQ* sono uguali ai momenti delle *με Pl ko*. Di nuovo aggiunto il momento della *ki*, si dimostreranno i momenti delle forze *μt μr PQ ki* uguali a' momenti delle *με Pl kx xy*; e così continuando la dimostrazione si giugnerà finalmente a provare che i momenti delle *μt VY ab eb* ecc..... *ki PQ μr* sono uguali a' momenti delle *VX am en φδ* ecc...... *kx Pl με*, che dinotano gli eccessi con cui ogni cuneo superiore premerebbe l' inferiore contiguo più che non sarebbe da esso premuto, non contando il peso de' superiori; per conseguenza la somma de' momenti delle *VX am en φδ* ecc..... *kx Pl με* esprimerà la somma de' momenti che tendono a rovesciare il pilastro *Az*. Prop. 13 Lib. I.

Si chiami al solito un' ascissa $BL = x$, l' ordinata $LI = y$, la grossezza uniforme o non uniforme dell' Arco $= g$, la saetta $= n$, la semicorda $= b$, l' altezza del pilastro $= a$, la sua grossezza $= G$: sarà il momento dell' eccesso *Pl* con cui il cuneo superiore *OI* preme l' inferiore *IK* più di quello sia da esso premuto $= \left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \right.$ Prop. 3 di questo

$\frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}) . ((\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2) : (\frac{6dyds}{ddx} + 3g) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y))$; e però la somma de' momenti degli eccessi suddetti dalla sommità alla mossa, cioè la somma de' momenti delle forze *VX am en φδ* ecc..... *kx Pl με* riuscirà $= \int (2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d(\frac{dyds}{ddx}) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}) . ((\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2) : (\frac{6dyds}{ddx} + 3g) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y))$ che chiamo $= (R)$, purchè dopo l' integrazione si sostituisca in luogo di x il valore n della saetta, e l' integrazione sia fatta in modo che quando x e y siano uguali a zero, tutto svanisca.

Anche se (restando orizzontale l' impostatura *Aπ*) la direzione *μt* prolungata passasse sotto il punto z, cosicchè la forza *μt* s' impiegasse a sostenere non a rovesciare il pilastro, e negativo fosse il suo momento, si troverà similmente che
Prop. 14 Lib. I. la differenza de' momenti delle forze *VΥ ab eb* ecc..... *ki PQ μr* dal momento della forza medesima *μt* è uguale a' momenti delle forze *VX am en φδ* ecc..... *kx Pl με*, de' quali i superiori riuscirebbero positivi, e negativi gl' inferiori vicini all' impostatura, e che però la formola sopraddetta (*R*) serve anche in questo caso a dinotare il totale sforzo contro il pilastro. E lo stesso si dica se la direzione della forza *μt* prolungata passi pel punto z, o pel centro del moto, in modo che il suo momento fosse nullo, e non valesse nè ad accrescere nè a diminuire lo sforzo contro al pilastro.

Se poi l' impostatura *Aπ* non sia orizzontale, egli è chiaro, che alla quantità (*R*) bisogna aggiugnere il momento della forza *μΓ* quando la direzione *μΓ* passi sopra z, e toglierlo se passa di sotto, la qual forza *μΓ* nella prima supposizione di *Aπ* orizzontale era infinitesima e però trascurabile, non così in questa. E perchè generalmente dividendo la gravità di un cuneo nelle
Corol. forze perpendicolari alle commessure, risulta il momento della
Prop. 3 di questo inferiore d' intorno al centro del moto $= \frac{g^2 dy^2}{2ddx} + \frac{g^3 dy}{3ds} + (\frac{gdy^2}{ddx}$

$+ \frac{g^2 dy}{2ds}) . \left(\frac{dy}{ds} (a + n - x) - \frac{dx}{ds} (G + b - y) \right)$, farà il momento di $\mu\Gamma$ uguale alla quantità medesima purchè in luogo di x si sostituisca la saetta n, e in luogo di y la semicorda b. E semplificando farà il momento di $\mu\Gamma$, che chiamo (D), $= \frac{g^3 dy^2}{2ddx} + \frac{g^3 dy}{3ds} + (\frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2 dy}{2ds}) . (\frac{ady}{ds} - \frac{Gdx}{ds})$: quindi la somma de' momenti contro al pilastro $Az = (R) + (D) = \int (2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d(\frac{dyds}{ddx}) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}) . \left((\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2) : (\frac{6dyds}{ddx} + 3g) + \frac{dy}{ds} (a + n - x) - \frac{dx}{ds} (G + b - y) \right) + \frac{g^3 dy^2}{2ddx} + \frac{g^3 dy}{3ds} + (\frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2 dy}{2ds}) . (\frac{ady}{ds} - \frac{Gdx}{ds})$, sostituendo dopo le opportune operazioni in luogo di x la saetta n, e la semicorda b in luogo di y, e avvertendo di fare l' integrazione della quantità sotto il segno integrale sì che quando x e y siano uguali a zero tutto svanisca; il che ecc.

Corollario.

Ma se nell' Arco di uniforme grossezza o no vi fosse una forza $= q$ che si unisse colla forza *VX* del serraglio per premere il primo cuneo, allora, come abbiamo detto, le differenze *VX am en* $\varphi\delta$ ecc...... s' ingrandirebbero ciascuna di una quantità $= q$; laonde retrocedendo, come nella proposizione, si dimostrerà che la somma de' momenti contro al pilastro *Az* diventa uguale al momento di essa forza *q* applicata secondo la sua prima direzione *VX* insieme co' momenti delle *VX am en* $\varphi\delta$ ecc. *kx Pl* $\mu\varepsilon$. Di nuovo perchè la perpendicolare condotta dal punto *z* sulla direzione della forza *Pl* del cuneo *IK* corrispondente all' ascissa x è $= (\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2) : (\frac{6dyds}{ddx} + 3g) + \frac{dy}{ds} (a + n - x) - \frac{dx}{ds} (G + b - y)$, fatta $x = 0$ e $y = 0$, farà la perpendicolare condotta dal punto

Corol. 3 Prop. 4 di questo

Corol. Prop. 3 di questo

medesimo z sulla direzione $VX = \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2 \right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g \right) + \frac{dy}{ds}(a+n) - \frac{dx}{ds}(G+b)$; e però il momento della forza q per la direzione VX sarà $= q \left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2 \right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g \right) + \frac{dy}{ds}(a+n) - \frac{dx}{ds}(G+b) \right)$ in cui dopo le opportune sostituzioni bisognerà far di nuovo $x = 0$, e $y = 0$. Per la qual cosa aggiunto questo momento alla somma de' momenti trovata nella proposizione, sì pel caso nel quale sia l' impostatura orizzontale, che per l' altro quando sia all' orizzonte inclinata, sarà data la totale somma de' momenti contro al pilastro di un Arco di uniforme o non uniforme grossezza spinto superiormente da una forza q per una direzione perpendicolare alla commessura inferiore del serraglio.

S c o l i o.

Ecco pertanto risoluto il tanto ventilato Problema che domanda la somma de' momenti delle forze che operano contro i pilastri di un Arco, e risoluto nella maniera la più generale di quante altre mai, poichè si sono supposte di qualsivoglia natura le curve interiore ed esteriore che l' Arco comprendono. Non resta dunque che mostrare l' applicazione delle nostre formole a qualche caso particolare, e di dar loro qualche prova affine di facilitarne l' intendimento e di convincere anche con un metodo a posteriori *della sicurezza de' loro risultamenti.*

PROBLEMA 6. PROPOSIZIONE 6.

Si domanda la somma de' momenti delle pressioni esercitate contro a' pilastri di un Arco scemo circolare da cui sia stata tolta la centina.

Sia l' Arco ſcemo circolare ABC diſarmato di centina, e la ſaetta $BE = n$, la ſemicorda $AE = b$, la groſſezza uniforme dell' Arco $= g$, l' altezza Ab del pilaſtro $= a$, e la ſua groſſezza $= G$. E perchè l' impoſtatura non è orizzontale, ſarà per le coſe dimoſtrate nell' antecedente la ſomma ricercata de' momenti $= (R) + (D)$ eſſendo $(R) = \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}\right) \cdot \left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)\right)$, e $(D) = \frac{g^2dy^2}{2ddx} + \frac{g^3dy}{3ds} + \left(\frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds}\right) \cdot \left(\frac{ady}{ds} - \frac{Gdx}{ds}\right)$. Ora eſſendo ABC un circolo, chiamata x la aſciſſa, y l' ordinata, e r il raggio AD, ſarà $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$ l' equazione alla curva interiore, il di cui raggio oſculatore $\frac{dyds}{ddx}$ diventa quantità coſtante com' è anche la groſſezza g dell' Arco; dunque $d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) = 0$, e $dg = 0$; e perciò $(R) = \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds}\right) \cdot \left(\frac{3gr + 2g^2}{3(2r + g)} + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)\right)$.

Fig. II. Tav. III.

Prop. ant.

Differenziando pertanto l' equazione al cerchio ſi troverà $dy = \frac{dx(r - x)}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$, $ds = \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{r - x}{r}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{r}\sqrt{(2rx - x^2)}$, $\frac{ddy}{ds} = \frac{-dx}{r}$, e $\frac{dy^2}{ddx} = \frac{dyds}{ddx} \cdot \frac{dy}{ds} = r \cdot \frac{r - x}{r} = r - x$; e ſoſtituendo queſti sì fatti valori in (R) ſi conſeguirà $(R) = \int\left(2gdx + \frac{g^2dx}{r}\right) \cdot \left(\frac{3rg + 2g^2}{3(2r + g)} + \frac{r - x}{r}(a + n - x) - \frac{1}{r}\sqrt{(2rx - x^2)} \cdot \left(G + b - \sqrt{(2rx - x^2)}\right)\right) = \frac{2gr + g^2}{r}$.

$\int\left(\frac{dx(3rg+2g^2)}{3(2r+g)} + \frac{dx(r-x)}{r}.(a+n) - \frac{xdx(r-x)}{r} - \frac{dx(G+b)}{r}.\right.$
$\left.\sqrt{(2rx-x^2)} + \frac{dx(2rx-x^2)}{r}\right)$: ma $\frac{-xdx(r-x)}{r} + \frac{dx(2rx-x^2)}{r}$
$= xdx$, e $\frac{-dx(G+b)}{r}.\sqrt{(2rx-x^2)} = \frac{-dx(G+b).(2rx-x^2)}{r\sqrt{(2rx-x^2)}}$
$= \frac{dx(G+b).(r-x)^2}{r\sqrt{(2rx-x^2)}} - (G+b).\frac{rdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \frac{dx(G+b).(r-x)^2}{2r\sqrt{(2rx-x^2)}}$
$+ \frac{r^2dx(G+b)}{2r\sqrt{(2rx-x^2)}} - \frac{dx(G+b).(2rx-x^2)}{2r\sqrt{(2rx-x^2)}} - (G+b).\frac{rdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$
e finalmente $= \frac{dx(G+b).(r-x)^2}{2r\sqrt{(2rx-x^2)}} - \frac{dx(G+b).\sqrt{(2rx-x^2)}}{2r}$
$- \frac{G+b}{2}.ds$; dunque $(R) = \frac{2gr+g^2}{r}.\int\left(\frac{dx(3rg+2g^2)}{3(2r+g)} +\right.$
$\frac{dx(r-x)}{r}.(a+n) + xdx + \frac{dx(G+b).(r-x)^2}{2r\sqrt{(2rx-x^2)}} - \frac{dx(G+b).\sqrt{(2rx-x^2)}}{2r}$
$\left.- \frac{ds(G+b)}{2}\right)$: laonde integrando coll' aggiunta della costante
(P), sarà $(R) = \frac{2gr+g^2}{r}.\left(\frac{x(3rg+2g^2)}{3(2r+g)} - (r-x)^2.\frac{a+n}{2r}\right.$
$\left.+ \frac{x^2}{2} + \frac{G+b}{2r}.(r-x).\sqrt{(2rx-x^2)} - \frac{s(G+b)}{2}\right) + (P)$:
quando poi $x=0$, tutto dee svanire; dunque $(P) = \frac{r^2(a+n)}{2}$,
e $(R) = \frac{2gr+g^2}{r}.\left(\frac{x(3rg+2g^2)}{3(2r+g)} + (2rx-x^2).\frac{a+n}{2r} + \frac{x^2}{2}\right.$
$\left.+ \frac{G+b}{2r}.(r-x).\sqrt{(2rx-x^2)} - \frac{s(G+b)}{2}\right)$.

Di nuovo passando a sostituire i valori differenziali nell' altra quantità (D) in prima menzionata, si troverà essa
$(D) = \frac{g^2(r-x)}{2} + \frac{g^3(r-x)}{3r} + \left(g(r-x) + \frac{g^2(r-x)}{2r}\right).\left(\frac{a(r-x)}{r}\right.$
$\left.- \frac{G}{r}\sqrt{(2rx-x^2)}\right) = \frac{(3rg^2+2g^3).(r-x)}{6r} + \frac{2rg+g^2}{r}.\left(\frac{a(r-x)^2}{2r}\right.$

$- \frac{C(r-x)}{2r}.\sqrt{(2rx-x^2)}) = \frac{2gr+g^2}{r}.(\frac{(3rg+2g^2).(r-x)}{6(2r+g)} + \frac{a(r-x)^2}{2r} - \frac{G(r-x)}{2r}.\sqrt{(2rx-x^2)})$; e però $(R)+(D) = \frac{2gr+g^2}{r}.(\frac{(3rg+2g^2).(r+x)}{6(2r+g)} + \frac{ar^2}{2r} + \frac{n(2rx-x^2)}{2r} + \frac{x^2}{2} + \frac{b(r-x)}{2r}.\sqrt{(2rx-x^2)} - \frac{s(G+b)}{2})$; sicchè, fatta finalmente $x=n$, $y=\sqrt{(2rx-x^2)}=b$, e s uguale all' arco AB, sarà la somma de' momenti contro al pilastro AW uguale a $\frac{2gr+g^2}{r}.(\frac{(3rg+2g^2).(r+n)}{6(2r+g)} + \frac{ar}{2} + \frac{nb^2}{2r} + \frac{n^2}{2} + \frac{b^2(r-n)}{2r} - \frac{AB(G+b)}{2}) = \frac{2gr+g^2}{r}.(\frac{(3rg+2g^2).(r+n)}{6(2r+g)} + \frac{ar}{2} + \frac{n^2+b^2}{2} - \frac{AB(G+b)}{2}) = \frac{2gr+g^2}{r}.(\frac{(3rg+2g^2).(r+n)}{6(2r+g)} + \frac{ar}{2} + nr - \frac{AB(G+b)}{2})$, avvegnachè $n^2+b^2=2nr$; il che ecc.

S C O L I O.

Confrontando questa formola della somma de' momenti contro al pilastro di un Arco scemo circolare con quella ritrovata con metodo sintetico al corol. 2 della prop. 16 del Lib. III. e avendo riflessione alla diversità delle lettere in esse formole impiegate, si conoscerà facilmente la loro identità; e questo confronto può servire di una nuova prova convincente de' nostri principj.

C O R O L L A R I O.

Quindi nell' Arco intero AFG sarà la somma de' momenti contro al pilastro AW (fatto il quadrante $AC = Q$, e la saetta $ZQ = r = b = n$) $= \frac{2bg+g^2}{b}.(\frac{3b^2g+2bg^2}{3(2b+g)} + \frac{ab}{2} + b^2$. Fig. XIII. Tav. II.

$$-\frac{Q(G+b)}{2}) = \frac{2bg+g^2}{b} \cdot (\frac{6b^3+6b^2g+2bg^2}{3(2b+g)} + \frac{ab}{2} - \frac{Q(G+b)}{2});$$

E la stessa formola si sarebbe in altro modo potuta ritrovare, vale a dire prendendo la somma generale de' momenti contro al pilastro di un Arco d' impostatura orizzontale ch' è

$$= \int (2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d(\frac{dyds}{ddx}) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds}) \cdot ((\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2) : (\frac{6dyds}{ddx} + 3g) + \frac{dy}{ds}(a+n-x) - \frac{dx}{ds}(G+b-y))$$

e facendovi poi le opportune sostituzioni. E anche qui è da osservarsi che la detta formola esprimente la somma generale de' momenti contro al pilastro di un Arco intero circolare è identica con quella sinteticamente ritrovata al corol. 1 della prop. 17 del Lib. III. per indicare la somma medesima.

PROBLEMA 7. PROPOSIZIONE 7.

Determinare la somma de' momenti contro a' pilastri di un Arco circolare composto.

Fig. VII. Tav. III. Sia ABC l' Arco a sesto acuto circolare, e della circonferenza AS sia centro il punto D: bisogna determinare la somma de' momenti del semiarco AS contro il pilastro AW.

Si faccia al solito la semicorda $Am = b$, la saetta $Sm = n$, l' ascissa $SV = x$, e la sua corrispondente ordinata $= y$, la grossezza uniforme dell' Arco $= g$, l' altezza del pilastro $= a$, e la di lui grossezza $= G$. Si conduca poi dal punto S la SQ parallela alla AC, e si compia il quadrante ARD: si prolunghi ancora la PV in O, e si unisca la retta SD.

Sarà pertanto il raggio $AD = \frac{(Am)^2 + (Sm)^2}{2 \cdot Am} = \frac{b^2 + n^2}{2b}$, che per facilità di calcolo chiamo $= r$; e sarà ancora $AD - Am = Dm = VO = r - b$, e la $DO = Sm - SV = n - x$, così la $PO = PV + VO = y + r - b$; laonde i quadrati delle PO DO uguali al quadrato della AD somministreranno l' equazione alla curva interiore $(y + r - b)^2 + (n - x)^2 = r^2$, dalla quale si ricava $y = -r + b + \sqrt{(r^2 - (n-x)^2)}$; e differenziando

renziando sarà $dy = \frac{(n-x)dx}{\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}}$, $ds = \frac{rdx}{\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{n-x}{r}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{r}\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}$, $\frac{ddy}{ds} = -\frac{dx}{r}$, $\frac{dyds}{ddx} = r$, $d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) = 0$, e per fine $\frac{dy^2}{ddx} = n - x$.

S' intenda poi divisa la gravità del serraglio nelle due forze prementi li cunei contigui, e sia ciascuna di esse forze $= p$. Oltre a ciò perchè dividendo la gravità del cuneo corrispondente all' ascissa x in due forze, che agiscano per direzioni perpendicolari alle commessure superiore ed inferiore, una e l' altra di esse vien espressa dal binomio $\frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds}$, se si sostituiscano i valori differenziali di sopra ritrovati, sarà certo che il binomio $g(n-x) + \frac{g^2}{2r}(n-x)$ esprimerà la pressione di esso cuneo contro il superiore contiguo; per conseguenza fatta $x = 0$, si troverà la pressione del cuneo contiguo al serraglio contro il serraglio $= gn + \frac{g^2n}{2r}$. Ora tre casi possono qui accadere, cioè o il serraglio preme tanto il cuneo laterale quanto viene da esso premuto e allora $p = gn + \frac{g^2n}{2r}$, o il serraglio lo preme di più e p diventa $>$ di $gn + \frac{g^2n}{2r}$, o finalmente il preme di meno e p si fa $<$ di $gn + \frac{g^2n}{2r}$.

Corol. Prop. 1 di questo

Pel primo caso poichè il cuneo laterale è tanto premuto dal serraglio, quanto questo da quello, non altererà il serraglio le pressioni de' cunei inferiori; sicchè essendo orizzontale l' impostatura del pilastro AW, sarà la somma de' momenti contro di esso, che dico $(R) = \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right.$

$-\frac{dgdy^2}{ddx}-\frac{gdydg}{ds}).\Big(\Big(\frac{3gdyds}{ddx}+2g^2\Big):\Big(\frac{6dyds}{ddx}+3g\Big)+\frac{dy}{ds}(a+$ Prop. 5 di questo $n-x)-\frac{dx}{ds}(G+b-y)\Big)$: ma g costante dà $dg=0$, e si è trovato $\frac{dyds}{ddx}=r$, e $d(\frac{dyds}{ddx})=0$; dunque $(R)=\int\Big(2gdx-\frac{g^2ddy}{ds}\Big)$. $\Big(\frac{3gr+2g^2}{6r+3g}+\frac{dy}{ds}(a+n-x)-\frac{dx}{ds}(G+b-y)\Big)$; o sostituendo sarà $(R)=\int\Big(2gdx+\frac{g^2dx}{r}\Big).\Big(\frac{3gr+2g^2}{6r+3g}+\frac{n-x}{r}.(a+n-x)$ $-\frac{1}{r}\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}.(G+b+r-b-\sqrt{(r^2-(n-x)^2)})\Big)$ $=\frac{2gr+g^2}{r}.\int\Big(\frac{(3gr+2g^2)dx}{6r+3g}+\frac{adx(n-x)}{r}+\frac{(n-x)^2dx}{r}+rdx-$ $\frac{(n-x)^2dx}{r}-\frac{G+r}{r}.dx\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}\Big)=\frac{2gr+g^2}{r}.\int\Big(\frac{(3gr+2g^2)dx}{3(2r+g)}$ $+\frac{adx(n-x)}{r}+rdx-\frac{G+r}{r}.dx\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}\Big)$: ma $\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}$ è $=PO$, e $\int dx\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}=$ allo spazio $SPOQ$; dunque integrando coll' aggiunta della costante T, si avrà $(R)=\frac{2gr+g^2}{r}.\Big(\frac{(3gr+2g^2)x}{3(2r+g)}+\frac{anx}{r}-\frac{ax^2}{2r}+rx$ $-\frac{G+r}{r}.SPOQ\Big)+T$. Quando poi x è $=0$, anche (R) debbe essere $=0$, e però $T=0$; conseguentemente $(R)=$ $\frac{2gr+g^2}{r}.\Big(\frac{(3gr+2g^2)x}{3(2r+g)}+\frac{anx}{r}-\frac{ax^2}{2r}+rx-\frac{G+r}{r}.SPOQ\Big)$; e finalmente fatta x uguale alla saetta n, e lo spazio $SPOQ$ allo spazio $SADQ$, ovvero all' arco $AS.\frac{SD}{2}$ insieme con $\frac{Dm.Sm}{2}$, si avrà $(R)=\frac{2gr+g^2}{r}.\Big(\frac{3gnr+2g^2n}{3(2r+g)}+\frac{an^2}{2r}+rn-$

$$\frac{G+r}{2r}\left(r.AS+(r-b)n\right)\Big)=\frac{2gr+g^2}{r}.\left(\frac{6gnr+6r^2n+2g^2n}{3(2r+g)}\right.$$
$$\left.-\frac{G+r}{2r}\left(r.AS+n(r-b)\right)+\frac{\alpha n^2}{2r}\right).$$

Di nuovo nel fecondo cafo dove il ferraglio preme più il cuneo laterale di quello che vien da effo premuto, cioè dove $p>gn+\frac{g^2n}{2r}$, fi faccia $p-gn-\frac{g^2n}{2r}=q$. E poichè vi ha una forza $=q$ che preme il primo cuneo, bifognerà alla formola fuperiormente ritrovata aggiugnere la quantità $q\Big(\big(\frac{3gdyds}{ddx}+2g^2\big):\big(\frac{6dyds}{ddx}+3g\big)+\frac{dy}{ds}(\alpha+n)-\frac{dx}{ds}(G+b)\Big)$ in cui x e y debbono effere uguali a zero, per avere l' intera fomma de' momenti contro al pilaftro: ma queft' aggiunta fi trova colle foftituzioni $=q\Big(\frac{3gr+2g^2}{6r+3g}+\frac{n-x}{r}(\alpha+n)-\frac{G+b}{r}.\sqrt{(r^2-(n-x)^2)}\Big)$, ovvero, fatte x e $y=0$ e $\sqrt{(r^2-n^2)}=r-b$, farà effa $=q\Big(\frac{3gr+2g^2}{3(2r+g)}+\frac{\alpha n}{r}+\frac{n^2}{r}-\frac{(G+b).(r-b)}{r}\Big)=q\Big(\frac{3gr+2g^2}{3(2r+g)}+\frac{\alpha n}{r}+\frac{n^2}{r}-\frac{(G+r).(r-b)}{r}+\frac{(r-b)^2}{r}\Big)=q\Big(\frac{3gr+2g^2}{3(2r+g)}+r+\frac{\alpha n}{r}-\frac{(G+r).(r-b)}{r}\Big)=q\Big(\frac{6r^2+6gr+2g^2}{3(2r+g)}+\frac{\alpha n}{r}-\frac{(G+r).(r-b)}{r}\Big)$; laonde farà la fomma de' momenti contro al pilaftro dell' Arco compofto circolare $=\frac{6r^2+6gr+2g^2}{3(2r+g)}.q+\frac{\alpha qn}{r}-\frac{q(G+r).(r-b)}{r}+\frac{2gr+g^2}{r}.\Big(\frac{6gnr+6r^2n+2g^2n}{3(2r+g)}-\frac{G+r}{2r}.\big(r.AS+n(r-b)\big)+\frac{\alpha n^2}{2r}\Big)$: e quefte formole ricavate pel primo e fecondo cafo

Corol. Prop. 5 di quefto

ſono preciſamente uniformi, ſe ſi voglia tener conto del vario modo con cui ſi ſono eſpreſſe le quantità medeſime, all' altre formole del corol. della prop. 20 del Lib. III., dove abbiamo con metodo analitico riſoluto lo ſteſſo Problema.

Finalmente pel terzo caſo nel quale il ſerraglio reſta ſpinto all' insù colla differenza tra la forza $gn + \frac{g^2 n}{2r}$ e la forza p, chiamata eſſa differenza $= q$, ſarà d' uopo ricorrere a quanto è ſtato detto per queſto caſo medeſimo alla prop. citata e ſuo corollario onde conſeguire la ſomma de' momenti contro al pilaſtro, non potendo le noſtre formole generali ſervire di alcun uſo per calcolare anche l' effetto delle forze che lateralmente ſpingono all' insù il ſerraglio; ſarà per con-

Corol. Prop. 20 Lib. III.

ſeguenza eſſa ſomma $= \frac{2gr + g^2}{r} . \left(\frac{6gnr + 6r^2 n + 2g^2 n}{3(2r + g)} - \frac{G + r}{2r} . \left(r . AS + n(r - b) \right) + \frac{an^2}{2r} \right) + \frac{q(G + r) . (r - b)}{r} + aqn . (r - b)^2 : \left(\frac{6gr + 6r^2 + 2g^2}{3(2r + g)} . r^2 - r(r - b)^2 \right)$; dunque ecc.

PROBLEMA 8. PROPOSIZIONE 8.

Data la curva interiore di un Arco, trovare qual curva eſteriore gli ſi debba aſſegnare, affinchè tutti i cunei ſi ſoſtengano ſcambievolmente fra di loro in equilibrio.

Fig. V. Tav. V.

Sia ALm la curva interiore di un Arco, ſi ricerca qual debba eſſere la eſteriore perchè tutti i cunei ſieno in equilibrio fra loro; ſicchè uno qualunque di eſſi per eſempio $bLeZ$ prema l' inferiore $ZeTa$ quanto da eſſo è a vicenda premuto.

Facciaſi l' aſciſſa $mO = x$, l' ordinata $OL = y$, la groſſezza Lb dell' Arco al punto $L = g$, eſſendo g quantità variabile: ſarà per le coſe dimoſtrate uguale a $2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx} \right)$

$-\frac{dgdy^2}{ddx}-\frac{gdydg}{ds}$ la differenza delle pressioni de' due cunei *bLeZ ZeTa* fra di loro. Ma i cunei debbono per condizione del problema restare in equilibrio; dunque questa differenza ha da essere uguale a zero; e per conseguenza $2gdx-\frac{g^2ddy}{ds}-\frac{gdy}{ds}$. $d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)-\frac{dgdy^2}{ddx}-\frac{gdydg}{ds}=0$, dalla qual equazione col mezzo delle sostituzioni e de' modi soliti si ricaverà il valor di g dato per le coordinate x y, e quindi anche la natura e l'equazione della curva esteriore dell'Arco; il che ecc. Prop. 2 di questo

Corollario I.

Sia, per esempio, circolare la curvatura *AIC* e *B* il suo centro, e domandisi l'esteriore. Fatta $IG=x$, $GF=y$, il raggio $BI=r$, sarà $y^2=2rx-x^2$; e perciò $\frac{dy}{ds}=\frac{r-x}{r}$, $\frac{ddy}{ds}=-\frac{dx}{r}$, $\frac{dy^2}{ddx}=r-x$, $\frac{dyds}{ddx}=r$, e $d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)=0$; laonde sostituendo questi valori nell'equazione $2gdx-\frac{g^2ddy}{ds}-\frac{gdy}{ds}$. $d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)-\frac{dgdy^2}{ddx}-\frac{gdydg}{ds}=0$, si avrà $2gdx+\frac{g^2dx}{r}-dg(r-x)-\frac{gdg(r-x)}{r}=0$; dunque $2rgdx+g^2dx=(r-x).(rdg+gdg)$, e $\frac{dx}{r-x}=\frac{dg(r+g)}{2gr+g^2}$, e integrando coll'aggiunta della costante, sarà $-l.(r-x)=\frac{1}{2}l.(2gr+g^2)+l.Q$; e passando dai logaritmi a' numeri s'avrà $\frac{1}{r-x}=Q(2gr+g^2)^{1:2}$. Per determinare la costante Q, supporremo che si voglia la grossezza dell'Arco in sommità, o la $IK=m$; e però quando $x=0$ dovrà essere $g=m$; ma fatta $x=0$ e $g=m$ l'equazione si Fig. VI. Tav. V.

converte in $\frac{1}{r} = Q(2mr + m^2)^{1:2}$; laonde $Q = \frac{1}{r(2mr + m^2)^{1:2}}$; per conseguenza la nostra equazione sarà questa $\frac{r}{r-x} = \sqrt{\frac{2gr + g^2}{2mr + m^2}}$, da cui risulta $g = -r + \sqrt{\left(\frac{r^2(2mr + m^2)}{(r-x)^2} + r^2\right)} = FN$. D'onde è manifesto che nel caso che l'ascissa IG sia $= IB = r$, la grossezza in C diventa infinita; dunque la curva esteriore KNM dell'Arco debbe aver per asintoto la retta BD prolungata.

Corollario 2.

Si supponga in secondo luogo che la grossezza dell'Arco sia infinitesima di grandezza, cosicchè tutto il peso de' cunei resti concentrato nelle loro basi. Pertanto sarà nel caso d'equilibrio $2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - \frac{dgdy^2}{ddx} - \frac{gdydg}{ds} = 0$: ma g è quantità infinitesima, dunque i termini $-\frac{g^2ddy}{ds}$, $\frac{-dgdy^2}{ddx}$, $\frac{-gdydg}{ds}$ svaniscono per essere infinitesimi rispetto agli altri; laonde dividendo per g sarà $2dx - \frac{dy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) = 0$; e integrando $2x - \frac{dy}{ds}.\frac{dyds}{ddx} + \int\frac{dyddyds}{dsddx} + B = 0$, ovvero $2x - \frac{dy^2}{ddx} - \int dx + B = x - \frac{dy^2}{ddx} + B = 0$. Di nuovo essendo $\frac{-dy^2}{ddx} = \frac{-dy}{ddx}.dy = \frac{dx}{ddy}.dy = \frac{dxdy}{ddy}$, s'avrà $x + \frac{dxdy}{ddy} + B = 0$; e però $xddy + dxdy + Bddy = 0$; e integrando ancora $xdy + Bdy + Cds = 0$, quindi $dy = \frac{-Cds}{x+B}$, e $dy^2 = \frac{C^2ds^2}{(x+B)^2} = \frac{C^2dx^2 + C^2dy^2}{(x+B)^2}$; dunque $dy^2\left((x+B)^2 - C^2\right) = C^2dx^2$, e per conseguenza $dy =$

$\frac{-Cdx}{\sqrt{((x+B)^2-C^2)}}$. Per trovare il valore di una coſtante dato per l' altra, rimarco che eſſendoſi dimoſtrata l' equazione $xdy + Bdy + Cds = 0$, ſarà $x + B + \frac{Cds}{dy} = 0$; ma quando $x = 0$ debbe eſſer la tangente al rigoglio dell' Arco parallela all'ordinate e però $dy = ds$; laonde $B + C = 0$, e $C = -B$; quindi $dy = \frac{Bdx}{\sqrt{((x+B)^2-B^2)}}$ oſſia $dy = \frac{Bdx}{\sqrt{(x^2+2Bx)}}$, ch' è l' equazione alla catenaria comune; dunque ſuppoſta infiniteſima la groſſezza dell' Arco, biſogna ch' eſſo abbia la forma di una catenaria comune affinchè tutti i cunei ſi ſoſtentino fra di loro in equilibrio.

COROLLARIO 3.

Si ſupponga in terzo luogo coſtante e finita la groſſezza de' cunei, e ſi ricerchi la curva del loro equilibrio. E perchè g è coſtante, ſarà $dg = 0$; dunque ſarà $2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) = 0$, cioè $2dx - \frac{gddy}{ds} - \frac{dy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) = 0$, e integrando ſarà $2x - \frac{gdy}{ds} - \frac{dy}{ds} . \frac{dyds}{ddx} + \int \frac{dyddyds}{dsddx} + B = 0$, ovvero $2x - \frac{gdy}{ds} - \frac{dy^2}{ddx} - \int dx + B = x - \frac{gdy}{ds} - \frac{dy^2}{ddx} + B = x - \frac{gdy}{ds} + \frac{dxdy}{ddy} + B = xddy - \frac{gdyddy}{ds} + dxdy + Bddy = 0$; e di nuovo integrando avremo $xdy - \frac{gdy^2}{2ds} + Bdy + Cds = 0$, cioè $2xdyds - gdy^2 + 2Bdyds + 2Cds^2 = 0$; ch' è l' equazione alla curva ricercata.

Sarà pertanto $ds^2 + \frac{x+B}{C} . dyds = \frac{gdy^2}{2C}$, e $ds = -\frac{x+B}{2C} . dy$

$-\frac{dy}{2C}\sqrt{\left(2gC+(x+B)^2\right)}$, e $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dy^2\left(\frac{(x+B)^2}{2C^2}\right.$ $\left.+\frac{g}{2C}+\frac{x+B}{2C^2}.\sqrt{\left(2gC+(x+B)^2\right)}\right)$; e finalmente si conseguirà

$$(Q)\ldots dy = \frac{-2Cdx}{\sqrt{\left(2(x+B)^2+2gC-4C^2+2(x+B).\sqrt{(2gC+(x+B)^2)}\right)}}$$

ed è manifesto ch' essendo $2x - \frac{gdy}{ds} + 2B + \frac{2Cds}{dy} = 0$, e nel caso di $x = 0$ anche $dy = ds$, sarà $-g + 2B + 2C = 0$, dunque $2C = g - 2B$, e così sarà dato il valor di una costante per il valore dell' altra. Se in quest' equazione (Q) si faccia la grossezza g dell' Arco $= 0$, si conseguirà $dy = \frac{-Cdx}{\sqrt{((x+B)^2 - C^2)}}$; ma in questo caso $2C = -2B$, e $-C = B$, dunque $dy = \frac{Bdx}{\sqrt{(x^2 + 2Bx)}}$, ch' è la stessa equazione alla catenaria comune ritrovata nel corollario antecedente. L' equazione poi (Q) può dirsi della famiglia delle catenarie, ma non però la comune, quando la grossezza g dell' Arco sia finita. Non è dunque vero quanto asseriscono alcuni Autori dicendo che la curva interiore de' cunei in equilibrio, supposta costante e finita la grossezza dell' Arco, debba essere la catenaria comune; questa curva lo è solo nel caso ch' essa grossezza sia infinitesima, come si è dimostrato.

S c o l i o.

Dopo di aver trattato generalmente della spinta degli Archi, forniti di qualsivoglia curvatura interiore ed esteriore contro a' pilastri, sarà bene additare come si debba ritrovare questa spinta negli Archi piani, i quali avendo una singolar costruzione non possono essere soggetti a' canoni generali da noi superiormente proposti.

TEOREMA

TEOREMA I. PROPOSIZIONE 9.

In un Arco piano ſenza centina tanto un cuneo è premuto da' cunei contigui da una, e dall' altra parte, quanto e' li preme dalla parte medeſima, vale a dire che tutti i cunei ſono in equilibrio fra di loro, nè vi ha biſogno di ſopraccentina per ſoſtenerli.

Imperciocchè nell' Arco piano *CABG* ſi prendano i centri di gravità *V T* del ſerraglio *MNLI* e del cuneo contiguo *ILKH*. Fig. XIV. Tav. I.

Pertanto poichè la gravità del ſerraglio *MNLI* operando per la direzione verticale *VD* viene ſoſtenuta da' piani *MN LI*, la preſſione del ſerraglio ne' piani ſi farà per direzioni alle *ID MD* perpendicolari. Dunque a queſte direzioni ſono perpendicolari le rette medeſime *ID MD*, ſiccome alla direzione *VD* della gravità è perpendicolare la *LN*; laonde il triangolo *LDN* è compreſo da rette linee perpendicolari alle direzioni di tre forze in equilibrio; quindi, per la Statica, ſe *LN* eſprima la gravità del ſerraglio, eſprimerà *LD* la ſua preſſione ſul piano *IL*. Allo ſteſſo modo ſi proverà che ſe *XL* eſprima la gravità del cuneo *ILKH*, la *LD* eſprimerà la preſſione di lui ſul piano medeſimo *IL*: ma le *KL LN* ſono uguali fra loro, adunque tanto il ſerraglio *MNLI* preme il cuneo *ILKH*, quanto da eſſo è premuto. Similmente ſi dimoſtrerà di tutte le altre preſſioni de' cunei sì dall'uno che dall' altro lato; laonde tutti i cunei componenti un Arco piano ſi premono fra di loro ugualmente, nè hanno d' uopo di ſopraccentine che li tengano obbligati al loro luogo; il che ecc. Prop. 4 Lib. I.

TEOREMA 2. PROPOSIZIONE 10.

Un Arco piano impiega ſempre la ſteſſa forza contro a' pilaſtri, di qualſivoglia numero di cunei ſia eſſo formato.

Fig. XIV. Tav. I.

Abbiasi l' Arco piano $CABG$, dico che di qualsivoglia numero di cunei sia esso formato agirà sempre colla stessa forza contro a' pilastri.

Sia $CAmp$ l' ultimo cuneo o la mossa del pilastro AX. E perchè tutti i cunei dell' Arco piano si premono fra di loro ugualmente, il pilastro AX non può soffrire altra pressione che quella esercitata dalla mossa medesima $CAmp$ contro di esso lui; e per le cose dette nell' antecedente se Am esprima la gravità del cuneo $CAmp$, la AD esprimerà la pressione di lui sulla impostatura AC. Ma se Am esprime il peso del cuneo $CAmp$, la AB esprime il peso di tutto l' Arco $CABG$; dunque il peso di tutto l' Arco sta alla pressione sul pilastro come AB ad AD; laonde di qualunque numero di cunei sia l' Arco piano formato, sarà sempre vero che il peso di tutto l' Arco sta alla pressione contro un pilastro nella costante ragione della retta AB alla AD; e per conseguenza l' Arco piano preme i suoi pilastri sempre ugualmente di qualunque numero di cunei sia esso formato, anche se fossero infiniti di numero; il che ecc.

PROBLEMA 9. PROPOSIZIONE 11.

Ritrovare il momento della pressione de' cunei di un Arco piano contro i pilastri, di qualunque numero di cunei sia esso formato.

Fig. XIV. Tav. I.

Corol. 2 Prop. 10 Lib. I.

Nell' Arco piano $CABG$ sia la $AB = 2b$, la perpendicolare $ED = e$, la $AD = \sqrt{(b^2 + e^2)} = d$, la grossezza EF dell' Arco $= g$, l' altezza AW del pilastro $= a$, e la sua grossezza $WX = G$. Sarà la distanza EV della linea oV, che passa pel centro di gravità de' cunei, dalla $AB = \frac{3eg + 2g^2}{3(2e + g)}$; e però la $DV = DE + EV = e + \frac{3eg + 2g^2}{3(2e + g)} = \frac{6e^2 + 6eg + 2g^2}{3(2e + g)}$: sia poi diviso l' Arco piano in un numero n di cunei, onde il numero de' cunei da ciascuna parte del serraglio sia $= \frac{n - 1}{2}$.

E poichè qualunque sia il numero de' cunei ne' quali è l' Arco piano diviso egli impiega sempre la stessa forza contro il pilastro, se si faccia come la AB alla AD così la gravità dell' Arco piano $CABG$ ad un quarto proporzionale, si conseguirà essa forza quando l' Arco sia un pezzo solo, e però anche se sia diviso in un numero n di cunei. In oltre essendo $DE:DF::AB:CG$, ovvero $e:e+g::2b:CG$, s' avrà $CG = \frac{2b}{e}(e+g)$; e però $AB + CG = 2b + \frac{2b}{e}(e+g)$: dunque l' area $CABG$ o il peso dell' Arco piano $= (AB + CG)$. $\frac{EF}{2} = \frac{g}{2}\left(2b + \frac{2b}{e}(e+g)\right) = \frac{2beg + bg^2}{e}$. Ma si è dimostrato che come la AB alla AD ossia $2b:d$, così sta la gravità dell' Arco piano $CABG$ alla forza contro il pilastro; dunque sarà questa forza $= \frac{2deg + dg^2}{2e} = \frac{dg}{2e}(2e+g)$: resta ora che determiniamo il momento della forza medesima, e primieramente la direzione con cui ella agisce. Prop. ant.

Se l' Arco piano fosse tutto di un pezzo solo $CABG$, è chiaro ch' essendo egli in questo caso appoggiato alle superficie CA GB, se dal centro di gravità V sia condotta una perpendicolare alla CA, questa nuova linea disegnerebbe la direzione con cui la forza soprammentovata opererebbe contro il piano CA e il pilastro AX. Ma se i cunei componenti l' Arco piano fossero i tre HL LM Mg, cosicchè in HK v' avesse un' impostatura, allora si dovrebbe condurre dal centro di gravità V del serraglio la retta Vs perpendicolare alla commessura IL, e prolungarla fino al concorso in s colla verticale Ts tirata dal centro di gravità T del cuneo HL; poi condurre anche la linea sz perpendicolare alla commessura HK per conseguire nella sz la direzione colla quale il cuneo HL preme la centina e il pilastro. Imperciocchè essendo le sz sV perpendicolari alle HK IL, se si prolunghi Ts, facendo il prolungamento proporzionale alla gravità del cuneo HL, e si compia un parallelogrammo sopra esse direzioni sV sz, si troverà che la pressione del cuneo HL per sV contro il serraglio è uguale e direttamente contraria alla pressione del serraglio contra di esso, e che nella sola direzione sV posso-

no esse pressioni riuscire direttamente opposte: quindi sz dinoterà la direzione, con cui il cuneo HL o l' Arco piano spignerebbe l' impostatura HK e il pilastro. Similmente dove la sz sega la verticale qz condotta dal centro di gravità q del cuneo pK, bisognerà condurre la zy perpendicolare a pm per avere la direzione zy con cui il cuneo o l' Arco piano premerebbe l' impostatura pm e il pilastro, se pK fosse l' ultimo cuneo. Ma essendovene un altro Cm, si condurrà dal suo centro di gravità r la verticale ry che interfechi la zy nel punto y, e da y la retta $y\varphi$ perpendicolare all' impostatura CA; esprimerà allora $y\varphi$ la direzione con cui il cuneo Cm preme la reale impostatura CA e il pilastro AX. E in questo modo si continuerà ad operare se vi fosse un maggior numero di cunei nell' Arco piano.

Ora dai punti s z si tirino le rette st zk parallele alla AB. E perchè si suppone l' Arco piano diviso in un numero n di cunei, e la AB è $= 2b$, saranno le Am mK KL LN ecc. uguali ciascuna a $\frac{2b}{n}$; dunque $EL = \frac{b}{n}$, $EK = \frac{3b}{n}$, $Em = \frac{5b}{n}$ ecc. Siano ancora ciascuna delle VT Tq qr ecc. uguali a m, il qual valore di m si determinerà poi colle altre quantità date. Si dimostrerà facilmente il triangolo DEL simile al triangolo VTS, e come $DE : EL :: VT : Ts$; allo stesso modo la simiglianza del triangolo DEK al triangolo stz darà l' analogia $DE : EK :: st : tz$; e la somiglianza de' triangoli DEm zky darà l' altra $DE : Em :: zk : ky$, e così successivamente se vi fossero altri cunei dalla parte medesima. In oltre dalla prima analogia, sostituendo le lettere, si ricava $e : \frac{b}{n} :: m : Ts = \frac{bm}{en}$; dalla seconda $e : \frac{3b}{n} :: m : tz = \frac{3bm}{en}$, la qt poi è $= Ts = \frac{bm}{en}$, dunque tutta $qz = \frac{bm}{en} + \frac{3bm}{en} = \frac{4bm}{en}$; parimenti dalla terza analogia si ha $e : \frac{5b}{n} :: m : ky = \frac{5bm}{en}$; laonde tutta $ry = rk + ky = qz + ky = \frac{4bm}{en} + \frac{5bm}{en} = \frac{9bm}{en}$; e proseguendo, se vi fosse un altro

cuneo dalla ſteſſa parte, ſi troverebbe la verticale condotta dal ſuo centro di gravità determinata allo ſteſſo modo che ſi è eſpoſto per l' altre antecedenti $= \frac{16bm}{en}$; e così ſucceſſivamente: dunque eſſendo $\frac{n-1}{2}$ il numero de' cunei per ogni parte del ſerraglio, ſarà generalmente la ry uguale al termine $\frac{n-1}{2}$ della ſerie $\frac{bm}{en}$, $\frac{4bm}{en}$, $\frac{9bm}{en}$, $\frac{16bm}{en}$ ecc.; ma il termine della ſerie ſuddetta è $= \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{bm}{en}$; e però $ry = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{bm}{en}$.

Di nuovo perchè $AE:ED::or:r\varepsilon$ ovvero $b:e::\frac{m}{2}:r\varepsilon$, s'avrà $r\varepsilon = \frac{em}{2b}$; e da queſta quantità togliendo il valore di ry ſi conſeguirà la rimanente $y\varepsilon = \frac{em}{2b} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{bm}{en}$: come poi $AD:DE::y\varepsilon:\varepsilon\varphi$ per la ſomiglianza de' triangoli ADE $y\varepsilon\varphi$, ovvero $d:e::\frac{em}{2b} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{bm}{en}:\varepsilon\varphi$; dunque $\varepsilon\varphi = \frac{e^2m}{2bd} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{bm}{dn}$. Ancora la proporzione $DE:EV::DA:Ao$, cioè $e:\frac{3eg+2g^2}{3(2e+g)}::d:Ao$, ſomminiſtra $Ao = \frac{d}{e} \cdot \frac{3eg+2g^2}{3(2e+g)}$, ſiccome l' altra proporzione $AE:AD::ro:o\varepsilon$ dà $o\varepsilon = \frac{dm}{2b}$, dunque la rimanente $A\varphi = o\varepsilon - \varepsilon\varphi - Ao = \frac{dm}{2b} - \frac{e^2m}{2bd} + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{bm}{dn} - \frac{d}{e} \cdot \frac{3eg+2g^2}{3(2e+g)}$.

Si tirino pertanto le $X\mu$ $W\pi$ perpendicolari alla AD, la $W\Upsilon$ perpendicolare alla $X\mu$, e la $X\delta$ parallela alla AD che in-

terſechi la direzione $y\varphi$ prolungata in δ. S' avrà per la ſomiglianza de' triangoli ADE $AW\pi$ come $AD : DE :: AW : A\pi$, e però la linea retta $A\pi = \frac{e\alpha}{d}$; e per la ſomiglianza de' triangoli XWY ADE ſarà $DA : AE :: XW : WY$, e però la retta $WY = \frac{bG}{d} = \mu\pi$; laonde $A\mu = A\pi - \mu\pi = \frac{e\alpha}{d} - \frac{bG}{d}$; s' è poi ſuperiormente determinata anche la $A\varphi$; per conſeguenza $A\mu - A\varphi = \varphi\mu = X\delta = \frac{e\alpha}{d} - \frac{bG}{d} - \frac{dm}{2b} + \frac{e^2m}{2bd} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{bm}{dn} + \frac{d}{e} \cdot \frac{3eg + 2g^2}{3(2e+g)}$. Oltre a ciò perchè ſino dal principio s' è trovata la $DV = \frac{6e^2 + 6eg + 2g^2}{3(2e+g)}$, e come $DE : Ex (= LN) :: DV : VY$, ovvero $e : \frac{2b}{n} :: \frac{6e^2 + 6eg + 2g^2}{3(2e+g)} : m$, ne ſeguirà che $m = \frac{2b}{en} \cdot \frac{6e^2 + 6eg + 2g^2}{3(2e+g)}$; quindi $X\delta = \frac{e\alpha}{d} - \frac{bG}{d} - \frac{d^2 - e^2}{den} \cdot \frac{6e^2 + 6eg + 2g^2}{3(2e+g)} - \left(\frac{n-1}{2n}\right)^2 \cdot \frac{2b^2(6e^2 + 6eg + 2g^2)}{3de(2e+g)} + \frac{d}{e} \cdot \frac{3eg + 2g^2}{3(2e+g)}$; cioè per eſſere $d^2 - e^2 = b^2$, ſarà $X\delta = \frac{e\alpha}{d} - \frac{bG}{d} - \frac{b^2}{n} \cdot \frac{6e^2 + 6eg + 2g^2}{3de(2e+g)} - \left(\frac{n-1}{2n}\right)^2 \cdot \frac{2b^2(6e^2 + 6eg + 2g^2)}{3de(2e+g)} + \frac{d}{e} \cdot \frac{3eg + 2g^2}{3(2e+g)} = \frac{e\alpha}{d} - \frac{bG}{d} - \frac{(n^2+1)b^2}{2n^2de} \cdot \frac{6e^2 + 6eg + 2g^2}{3(2e+g)} + \frac{d}{e} \cdot \frac{3eg + 2g^2}{3(2e+g)}$. Per fine riaſſumendo tutta la riſoluzione, poichè la forza contro il pilaſtro AX è $= \frac{dg}{2e}(2e+g)$, e ſi è ancora trovata la perpendicolare $X\delta$ condotta dal centro del moto X alla direzione $y\delta$ per cui opera la forza medeſima; ſarà dunque il ſuo momento uguale al prodotto di eſſa forza nella perpendicolare $X\delta = \frac{2eg + g^2}{2e} \cdot (e\alpha - bG) - \frac{(n^2+1)b^2g}{6n^2e^2} \cdot (3e^2 + 3eg + g^2) + \frac{d^2g^2}{6e^2} \cdot (3e + 2g)$; il che ecc.

Corollario.

E però quando l' Arco piano ſia tutto di un pezzo, e $n = 1$, ſarà il momento della forza contro il pilaſtro $= \frac{2eg + g^2}{2e} \cdot (ea - bG) - \frac{b^2 g}{3e^2} (3e^2 + 3eg + g^2) + \frac{d^2 g^2}{6e^2} (3e + 2g)$. Se poi eſſo Arco ſia di un infinito numero di cunei formato, ſarà il momento contro al pilaſtro $= \frac{2eg + g^2}{2e} \cdot (ea - bG) - \frac{b^2 g}{6e^2} (3e^2 + 3eg + g^2) + \frac{d^2 g^2}{6e^2} (3e + 2g)$.

Scolio.

Belidor *calcola in altro modo la ſpinta dell' Arco piano e il ſuo momento contro il pilaſtro, come ſi rileva dalla* Prop. troiſième Chap. III. Liv. II. Science des Ingenieurs. *Suppone prima diviſo l' Arco in due parti, e trova la ſpinta che in queſta ſuppoſizione riſulta contro il pilaſtro, e ſin qui egli procede bene; biſognava però prima dimoſtrare, come noi abbiamo fatto, che ſe anco i cunei non foſſero due ma di un numero qualſivoglia, ciò nulla oſtante la ſpinta contro a' pilaſtri reſta la ſteſſa. Trova dipoi il momento della ſpinta ſupponendo di nuovo ch' eſſa agiſca ſecondo una direzione tirata dal punto* A *perpendicolare all' impoſtatura* CA, *e qui pare che non s' appigli al vero, perchè abbiamo dimoſtrato che il numero de' cunei ne' quali è l' Arco diviſo entra come elemento nella ricerca del punto* φ, *da cui parte la direzione perpendicolare all' impoſtatura, nè ſo vedere qual ragione l' abbia indotto a preferire il punto eſtremo* A *dell' impoſtatura ſopra ogni altro.*

Fine del Libro Quinto.

LIBRO SESTO

APPLICAZIONE DELLA TEORIA ALLA PRATICA.

DEFINIZIONI.

I.

VOlta è una copertura degli edifizj, che si sostiene in aria mediante la connessione di più ordini di cunei, uno appresso all'altro, che la compongono. In ciò differiscono le Volte dagli Archi, che questi sono composti di un solo ordine di cunei, e di più d'uno le Volte.

II.

Volte a mezza botte sono quelle che posano sopra piante parallelogramme rappresentando internamente una cavità uniforme in tutta la loro lunghezza. Ovvero ancora Volte a mezza botte sono quelle comprese da più ordini di cunei o da più Archi uguali e simili; e si dicono intere, sceme, o composte, conforme sono gli Archi che le comprendono.

III.

Cupola è una Volta che rigirandosi intorno ad un medesimo centro rappresenta sì interna-

mente

mente che esternamente superficie di sfera o di sferoide. Si danno anche altre sorta di Volte, come Volte a spigoli, a vela ecc.; ma non facendosene parola nel presente Libro, è inutile diffinirle.

IV.

Come gli Archi, così le Volte si costruiscono sopra centine, che poi si allentano e si tolgono affatto; non così le cupole, le quali essendo composte di andari, come cornici, non hanno bisogno di armadura.

DOMANDA I.

Se sopra un Arco o una Volta $BGC\Sigma FD$ di qualunque curvatura interiore ed esteriore vi sieno collocati altri materiali, come quelli contenuti nello spazio $X\Sigma DA$ che terminano nella linea retta o curva AX, si domanda che possasi considerare lo spazio $X\Sigma DA$ come composto di tanti spazj minori $KopI$ $IpFH$ ecc. compresi fra le rette verticali Ko Ip HF ecc. condotte dai punti estremi delle basi esteriori op pF ecc... di ciascun cuneo; di modo che tutto il materiale suddetto sia diviso in tanti pezzi quanti sono i cunei componenti l' Arco o la Volta; e che in oltre i pezzi medesimi debbansi intendere non uniti con calce, nè aventi alcun soffregamento nelle loro commessure. Fig. I. Tav. VI.

DOMANDA II.

Che i muri delle Volte ſiano talmente coſtrutti, che dopo diſarmate le centine debba la reſiſtenza di eſſi equilibrarſi colla ſomma de' momenti delle forze che cercano roveſciarli.

SCOLIO.

Si prenderà ſempre queſta ſomma nell' ipoteſi che ſia infinito il numero de' cunei componenti un ordine o un Arco della Volta. E ſiccome i ſoffregamenti e la calcina, che tendono a ſtrettamente unire i cunei fra loro e coll' impoſtature, diminuiſcono di molto la ſomma de' momenti delle forze che, preſcindendo da tali oſtacoli, cercano roveſciare la muraglia; così quando queſta ſia in modo coſtrutta, che la ſua reſiſtenza equivalga alla detta ſomma, ſaremo ſicuri di averla meſſa ſuperiore in fatto ed in pratica ai momenti delle forze che realmente cercano roveſciarla, come a maggior cautela conviene che ſia.



PROBLEMA I. PROPOSIZIONE I.

DEterminare il momento della resistenza di un muro.

Siavi un muro AD della grossezza di un piede (parlerò sempre in misure di Francia), il quale non possa essere mosso che d' intorno alla retta CQ; bisogna ritrovare il momento della resistenza del muro AD, ovvero il momento delle forze con cui resiste ad essere mosso d' intorno alla linea esteriore CQ. Fig. VIII. Tav. IV.

Si supponga, per dare al Problema una maggior generalità, che il muro sia a scarpa dalla parte esteriore AQ; e del muro AD preso il centro di gravità E, si conduca la verticale EF, che sarà perpendicolare al piano della base CD: sia poi $GHIL$ un piano parallelo ai piani opposti AB MQ, il quale passi per la retta EF.

Resistendo primieramente la muraglia AB col suo proprio peso al movimento d' intorno alla linea CQ, è chiaro, che moltiplicando il peso per la linea LF, si conseguirà nel prodotto il momento della resistenza del peso del muro medesimo. Sicchè posta l'altezza KB di piedi a, la grossezza AK alla sommità di piedi D, la grossezza CB alla base di piedi G, e il peso di un piè cubico di muro di libbre P, si troverà colle regole della Meccanica la $LF = \frac{2G^2 + 2GD - D^2}{3(G + D)}$, e il peso del muro $AD = \frac{aP}{2}(G + D)$; laonde il momento del suo peso sarà $= \frac{aP}{2}(G + D) . \frac{2G^2 + 2GD - D^2}{3(G + D)} = \frac{aP}{6}(2G^2 + 2GD - D^2)$.

In secondo luogo il muro resiste ancora per la coerenza o legame, ch' egli ha col fondamento; e però fa d' uopo ritrovare il momento di tale coerenza e unirlo col momento di sopra determinato per avere il momento della totale resistenza della muraglia. Sia pertanto nota col mezzo di accurate sperienze la coerenza assoluta di un piè quadrato di mu-

ro, o il peso in libbre ad essa coerenza equivalente, e si dica $= R$; e perchè $CB = G$ e la $BD = 1$, farà l' area $CD = G$, e quindi la coerenza assolùta della base $CD = GR$. Di nuovo essendo la coerenza ugualmente distribuita per tutta la base CD, si potrà essa supporre concentrata nel centro di gravità della base CD; e però il suo momento d' intorno alla linea CQ farà uguale al prodotto della coerenza di CD nella metà di LL o di CB; quindi farà $= GR.\frac{G}{2} = \frac{G^2R}{2}$; laonde il totale momento della resistenza del muro AD farà $= \frac{aP}{6}(2G^2 + 2GD - D^2) + \frac{G^2R}{2}$; il che ecc.

Corollario.

Se il muro AD non fosse esternamente a scarpa ma in un piano verticale, onde $G = D$, farà il totale momento della sua resistenza $= \frac{aPG^2}{2} + \frac{G^2R}{2}$.

Scolio.

La coerenza assoluta della base di una muraglia debbe variare secondo la natura della calce e il modo d' intriderla nella rena, secondo la qualità de' materiali che s' adoperano nella costruzione, e finalmente secondo il tempo che s' è lasciato alla calce per unirsi e rassodarsi co' materiali medesimi; e le variazioni sono di necessità così irregolari, ch' è impossibile metterle tutte sotto un canone comune. In oltre se nell' alzare le muraglie si procedesse con tal ordine, che li suoli o le spianate non cordeggiassero in piano orizzontale, come si suol fare, ma in piano inclinato all' orizzonte, come fabbricava il Barone di Coëhorn *nelle Piazze dell' Olanda; oppure se si facessero a denti le spianate quantunque orizzontali, cosicchè ognuna di esse fosse legata alle superiori, e all' inferiori contigue e con la calce e col materiale della muraglia, allora si accrescerebbe la coerenza delle sezioni orizzontali, e quella della base, e vi sarebbe una nuova difficoltà volendo ridurla a calcolo. Per queste ragioni io consiglierei, ogni volta che si debbe soggettare una mura-*

glia a qualche forza, di ritrovare prima con acconcia sperienza qual sarebbe la coerenza di un piè quadrato di muro costruito nello stesso modo e cogli stessi materiali dopo il tempo che si vuol lasciar alla calcina per disseccarsi, indi fare la ritrovata coerenza = R *e sostituirla nelle formole.*

Pure negli esempj pratici e nel concreto farò uso delle sperienze del dottissimo Sig. Cap. Delanges *Professore di Matematica nel Collegio Militare registrate nel suo libro che ha per titolo* Esperienze ed Osservazioni sulle resistenze ecc., *stampato in Verona nell' anno* 1779. *Questi esperimenti sono stati fatti sul principio stabilito dal Celeberrimo Sig.* Cav. Lorgna *Brigadiere degl' Ingegneri Veneti, in un suo Opuscolo inserto negli Atti di Siena per l' anno* 1763, *di dover tener conto nel calcolo delle resistenze de' muri anche della coerenza della loro sezione al fondamento. Giusta il primo citato Autore la coerenza assoluta di un pollice quadrato di pietra legata con calce a pietra simile, dopo tre mesi di tempo, s' è trovata di libbre* $12\frac{2}{7}$; *quella di un pollice quadrato di mattone legato con altro mattone di libbre* $9\frac{2}{21}$; *e quella della pietra col mattone di libbre* $7\frac{2}{7}$; *dal che ne deriva che la coerenza assoluta di un piè quadrato di pietra con pietra può prendersi prossimamente uguale a libbre* 1769, *quella di un piè quadrato di mattone con mattone di libbre* 1310, *e di libbre* 1049 *la coerenza assoluta di un piè quadrato di pietra unita col mattone. Il peso poi di un piè cubo di pietra secondo* Belidor *è di libbre* 166 *circa, e quello di un piè cubo di mattone di libbre* 130: *ma a notabili differenze è soggetto il peso di queste materie.* quello del tufo = 90 lib.

PROBLEMA 2. PROPOSIZIONE 2.

Ritrovare la resistenza di un muro guernito di contrafforti.

Sia il muro *DB* a scarpa grosso 1 piede e guernito di contrafforti come nella Figura, che mostra il profilo e la pianta Fig. V. Tav. VI.

del muro medesimo. Sia poi come nell' antecedente la DE = piedi d, la AB = piedi g, l' altezza EB = piedi a, il peso di un piè cubico di muro = libbre P, e la coerenza assoluta di un piè quadrato di muro = libbre R: si troverà similmente che il momento della resistenza del muro DB,

Prop. ant. non compresi i contrafforti, è $= \frac{aP}{6}(2g^2 + 2gd - d^2) + \frac{g^2R}{2}$.

Sia inoltre $HLNO$ un trapezoide che indichi la pianta di un contrafforte, e si ponga la $HL = b$, la $ON = p$, la $GK = q$, e l' altezza del contrafforte sia uguale all' altezza a del muro, ma la distanza XM dal mezzo di un contrafforte al mezzo dell' altro sia $= n$. Preso poi il centro di gravità I della figura $HLON$, si tiri la IP parallela alla BM, e colle regole della Statica si trovi la retta KI che sarà $= \frac{2pq + bq}{3(b + p)} = BP$; dunque tutta la $AP = g + \frac{2pq + bq}{3(b + p)}$.

E perchè lo spazio $HLON = (HL + ON) . \frac{GK}{2} = \frac{q(b + p)}{2}$, sarà la solidità di un contrafforte $= \frac{aq}{2}(b + p)$, e il suo peso $= \frac{aqP}{2}(b + p)$; e però moltiplicando il peso per la AP si conseguirà il momento del peso medesimo $= \frac{aqP}{2}(b + p)$. $\left(g + \frac{2pq + bq}{3(b + p)}\right) = \frac{aqP}{6}\left(3g(b + p) + 2pq + bq\right)$; quindi distribuendo questo momento per tutta la lunghezza del muro, cioè dividendolo per la distanza n dal mezzo di un contrafforte al mezzo dell' altro, sarà certo che il momento della resistenza del muro DB si accrescerà per ogni piede di lunghezza in virtù del peso de' contrafforti della quantità $\frac{aqP}{6n}\left(3g(b + p) + 2pq + bq\right)$. Di nuovo essendo lo spazio $HLON = \frac{q(b + p)}{2}$, sarà la coerenza assoluta della sezione $HLON =$

$\frac{qR(b+p)}{2}$), la coerenza poi è uniformemente divisa per tutta la sezione, dunque moltiplicandola per la distanza IT o AP tra il suo centro di gravità e l' estremità del muro, s' avrà il momento della coerenza medesima $= \frac{qR(b+p)}{2}$.

$\left(g + \frac{2pq+bq}{3(b+p)}\right) = \frac{qR}{6}\left(3g(b+p) + 2pq + bq\right)$; per conseguenza distribuito per tutta la lunghezza del muro diventerà per ogni piè di lunghezza $= \frac{qR}{6n}\left(3g(b+p) + 2pq + bq\right)$; laonde i contrafforti aggiungono al muro per ogni piè di lunghezza il momento $\frac{aqP}{6n}\left(3g(b+p) + 2pq + bq\right) + \frac{qR}{6n}\left(3g(b+p) + 2pq + bq\right) = \frac{aqP + qR}{6n} \cdot \left(3g(b+p) + 2pq + bq\right)$; dunque il totale momento della resistenza del muro BD guernito di contrafforti sarà $= \frac{aP}{6}(2g^2 + 2gd - d^2) + \frac{g^2R}{2} + \frac{aqP+qR}{6n} \cdot \left(3g(b+p) + 2pq + bq\right)$; il che ecc.

COROLLARIO.

Se dato un muro senza contrafforti si volesse trovare la grossezza di altro muro della stessa gravità specifica, e della stessa coerenza, guernito di contrafforti di date dimensioni, e ugualmente alto e resistente del primo, si farà così. Poichè è costante in amendue i muri l' altezza a, il peso P di un piè cubico, e la coerenza R di un piè quadrato, sarà il momento della resistenza del primo $= \frac{aP}{6}(2G^2+2GD-D^2) + \frac{G^2R}{2}$, e quello del secondo come in questa proposizione; e però $\frac{aP}{6}(2G^2 + 2GD - D^2) + \frac{G^2R}{2} = \frac{aP}{6}(2g^2 + 2gd - d^2) + \frac{g^2R}{2} + \frac{aqP+qR}{6n}$. Prop. ant.

$\left(3g(b+p)+2pq+bq\right)$, nella qual equazione tutto è dato fuorchè la groſſezza g del muro con contrafforti, quindi riſolvendo l' equazione medeſima ſi troverà il valor di g. Viceverſa dato il muro con contrafforti, ſi potrà colla ſteſſa equazione determinare la groſſezza di altro muro che non ne ha, e che ſia della medeſima reſiſtenza. Riuſcirà in oltre più ſpedita la riſoluzione ſe i due muri non ſieno eſternamente a ſcarpa, nel qual caſo $G=D$, e $g=d$.

PROBLEMA 3. PROPOSIZIONE 3.

Sia data la corda di piedi 120 di una Volta ſcema a mezza botte, la ſaetta di 30 piedi, la groſſezza di 5 piedi, e la lunghezza di piedi 45; ſia poi fabbricata di tal pietra che peſi libbre 165 per piè cubo: biſogna ritrovare il totale gravamento ſoſtenuto dalla centina dopo terminata la coſtruzione della Volta.

Fig. III. Tav. IV. Si determinerà co' ſoliti metodi il prolungamento FR della ſaetta ſino al centro di piedi 45, il raggio interiore RI di piedi 75, e l'eſteriore RT di 80; e però, facendo uſo della proporzione d'Archimede, ſe ſi prenda come 14 : 11, così la differenza de' quadrati delle doppie RT RI ad un quarto proporzionale, ſi troverà il doppio valore dello ſpazio $DNEHBC$ compreſo fra le due circonferenze concentriche DNE HBC; dunque lo ſpazio $DNEHBC = \frac{11.(160^2-150^2)}{2.14} = \frac{34100}{28} = \frac{8525}{7}$; ma la Volta è lunga piedi 45, laonde la ſua ſolidità, ſe foſſe intera, aſcenderebbe a piedi cubici $\frac{8525}{7}.45$; ogni piè cubico poi peſa libbre 165; quindi la Volta, ſe foſſe intera, peſerebbe libbre $\frac{8525}{7}.45.165 = 9042589\frac{2}{7}$.

Di

Di nuovo perchè una Volta a mezza botte può considerarsi come l' aggregato di molti Archi uniti insieme, così tutte le cose, che ne' Libri antecedenti si sono dimostrate negli Archi, sì rispetto alla pressione de' cunei sulle centine che agli sfiancamenti ed altro, potranno legittimamente applicarsi anche alle Volte a mezza botte e alle loro centine; di modo che in questo luogo sarà lecito dire, come s'è provato per gli Archi circolari nella supposizione che il numero de' cunei da cui sono formati sia infinito, che nelle Volte circolari sceme a mezza botte il peso totale che aggrava la centinatura è quattro noni circa del peso ch' avrebbe la Volta se fosse intera; per conseguenza la pressione della Volta scema *ANG* sarà uguale a libbre $9042589 \frac{2}{7} . \frac{4}{9} =$ lib. 4018928 prossimamente; il che ecc.

Diff. 2 di questo

Corol. 3 Prop. 14 Lib. II.

S C O L I O.

Il Ch. Sig. Perronet *avendo fatto costruire a Neuilly un Ponte di cinque Volte precisamente delle dimensioni anzidette, calcolò poi nella sua Dissertazione inserita negli Atti dell' Accademia delle Scienze di Parigi, da noi in altro luogo menzionata, il carico sostenuto dalle centine loro dopo la soprapposizione de' cunei, e lo ha fatto ascendere a libbre* 2,400,000 *per ciascuna Volta, non comprendendo però il peso de' serragli, compresi i quali diventerebbe di libbre* 3,000,000 *circa, non di libbre* 4, 018, 928 *come l' abbiamo noi trovato nella proposizione. Questa differenza tanto notabile deriva dall' aver egli creduto che questo carico dovesse prendersi uguale a quattro noni del peso della Volta scema, e non a quattro noni del peso della Volta intera di cui quella fosse scema, come si è provato doversi fare. In oltre essendo le Volte del detto Ponte di Neuilly caricate superiormente da altri pesi, come appajono nel Disegno presentato dal citato Autore, anche per questa ragione non è loro adattabile la regola de' quattro noni, imperocchè quanto i carichi messi sopra le Volte possano far cangiare la somma delle loro pressioni sulle centinature il si vedrà nella seguente proposizione.*

Scol. 4 Pro p. cit.

PROBLEMA 4. PROPOSIZIONE 4.

In una Volta a mezza botte di uniforme grosſezza, caricata da qualſivoglia ſcala di peſi, trovare i punti d' equilibrio della centinatura, e la ſomma totale de' carichi ſu di eſſa prementi.

Fig. I. Tav. VI. Sia *BGC* la curva interiore di una Volta *CGBDFΣ* a mezza botte di uniforme groſſezza che giace ancora ſulla ſua centina; ſia poi la Volta caricata da una ſcala di peſi diſegnati dall' area *AHXΣFD*; biſogna determinare la ſomma totale de' peſi ſoſtenuti dalla centina, e i punti d' equilibrio, ſe pure ve n' abbia.

Sieno *opzn pFGz* due de' cunei infiniteſimi contigui componenti la Volta e ſiano ſopra baſi uguali *nz zG*; e da' punti *o p F* ſi alzino le verticali *oK pI FH*; dunque è lecito ſupporre che ſopra i cunei ſuddetti gravitino i due pezzi *KopI IpFH*: ſi tirino poi l' orizzontali *oL YpR*, e la *Ko* ſi prolunghi in *R*. (Dom. I. di queſto)

E perchè il peſo *KopI* ſta appoggiato alli due piani *Ip po*, preſo il ſuo centro di gravità *M*, e condotte la *MN* verticale, e le *MO MQ* perpendicolari alle *Ip op*, ſe nella *MN* ſi prenda qualſivoglia punto *N*, poi ſi compia il parallelogrammo *MONP*, dinoterà *MN* la gravità del pezzo *KopI*, *MO* la preſſione ſul piano *Ip*, e *MP* quella ch' egli eſercita contro al cuneo ſottoſtante *opzn*; ovvero, eſſendo le *Lo Lp op* perpendicolari riſpettivamente alle *MN MO MP*, ſe *Lo* eſprime la gravità di *KopI*, *Lp* eſprimerà la preſſione ſul piano *Ip*, e *op* quella contro il cuneo medeſimo *opzn*. Ma operando queſt' ultima forza per una direzione *MQ* non ſolo perpendicolare ad *op*, ma ancora alla centina (imperocchè per eſſere infiniteſimo il cuneo e uguali le groſſezze *on pz*, le curve *op zn* diventano parallele fra loro), ſarà la forza ſteſſa ſoſtenuta interamente dalla centina, nè potrà ella accreſcere o diminuire per alcun conto la ſpinta relativa del cuneo *opzn* contro l' inferiore contiguo *pFGz*. Similmente eſſendo la preſſione *MO* diretta per una linea perpendicolare alla direzione

della gravità del pezzo $IpFH$, non potrà ella produrre alcuna alterazione alla quantità della pressione del peso $IpFH$ sul proprio cuneo esercitata; e il peso premerà il cuneo nello stesso modo come se non fosse sollecitato dalla forza MO, lo stesso si proverà anche pe' cunei inferiori e superiori. Quindi basterà sommare la pressione che propriamente eserciterebbe ciascun cuneo contro la centina, quando non soffrisse il carico di alcun peso superiore, con la nuova pressione esercitata dal pezzo superiore contro il cuneo e la centina, per avere nella somma la quantità intera della pressione di un cuneo sulla centina.

Ora si ponga col nostro solito modo la $B\pi = x$, la $\pi n = y$, la $n\mu = dx$, la $z\mu = dy$, la $nz = ds$, e la grossezza uniforme della Volta $= g$; si dica in oltre la oK condotta dal punto o fino alla linea AX, che determina la scala de' pesi, $= z$: sarà la pressione che il cuneo $opzn$ eserciterebbe sulla centina, se non avesse il carico superiore, $= gdy + \frac{g^2ddx}{2ds}$ Prop. 14 Lib. IV.
$- \frac{ddx}{dy} \cdot \int \left(gdx - \frac{g^2ddy}{2ds} \right)$. Di nuovo perchè il raggio osculatore $n\text{Æ}$, presa costante ds, è $= \frac{dyds}{ddx}$, e la $on = g$, sarà tutta la $o\text{Æ} = g + \frac{dyds}{ddx}$; e però facendo come $n\text{Æ} : nz :: o\text{Æ} : op$, si troverà $op = ds + \frac{gddx}{dy}$. Sta poi come $nz : z\mu :: op : pR$, ovvero $ds : dy :: ds + \frac{gddx}{dy} : pR$, dunque $pR = Lo = dy + \frac{gddx}{ds}$; laonde la superficie $KopI = Ko . Lo = zdy + \frac{gzddx}{ds}$, colla qual quantità sarà anche espresso il peso del pezzo $KopI$. Si è poi dimostrato che come Lo a op, o sia $z\mu : nz$, così è il peso di $KopI$ alla sua pressione sul cuneo $opzn$ e sulla centina; dunque facendo $dy : ds :: zdy + \frac{gzddx}{ds}$ ad un quarto proporzionale, si conseguirà questa seconda pressione $= zds + \frac{gzddx}{dy}$; per con-

seguenza la pressione totale esercitata dal cuneo *opzn* sulla centina sarà $= gdy + \frac{g^2ddx}{2ds} - \frac{ddx}{dy}\int\left(gdx - \frac{g^2ddy}{2ds}\right) + zds + \frac{gzddx}{dy}$; ed integrando sarà la somma delle pressioni di tutti i cunei posti da B in $z = \int\left(gdy + \frac{g^2ddx}{2ds} + zds + \frac{gzddx}{dy}\right) - \int\frac{ddx}{dy}\int\left(gdx - \frac{g^2ddy}{2ds}\right)$.

Siccome poi ne' punti d' equilibrio, quando ve n' abbia, non vi debbe essere alcuna pressione sulla centina, così in questo caso sarà $gdy + \frac{g^2ddx}{2ds} - \frac{ddx}{dy}\int\left(gdx - \frac{g^2ddy}{2ds}\right) + zds + \frac{gzddx}{dy} = 0$; e però se cavati dall' equazione alla curva BC gli opportuni valori si sostituiscano poi nell' equazione testè ritrovata onde avere il valore di x, e accada che questo valore sia unico, reale, positivo, e minor della saetta Bx, sarà segno che tra B e C v' ha un punto d' equilibrio; e più d' uno se x abbia parecchi siffatti valori.

COROLLARIO I.

Ma essendo la grossezza g della volta uniforme e costante, e però $\int\left(gdx - \frac{g^2ddy}{2ds}\right) = gx - \frac{g^2dy}{2ds} + A$, e $\frac{ddx}{dy}\int\left(gdx - \frac{g^2ddy}{2ds}\right) = -\frac{g^2ddx}{2ds} + \frac{ddx}{dy}(gx + A)$, sarà ancora la totale pressione esercitata dal cuneo *opzn* sulla centina $= gdy + \frac{g^2ddx}{ds} + zds + \frac{gzddx}{dy} - \frac{ddx}{dy}(gx + A)$; la somma delle pressioni di tutti i cunei da B in $z = gy + \frac{g^2dx}{ds} + \int\left(zds + \frac{gzddx}{dy} - \frac{ddx}{dy}\right.$.

$(gx+A))$; e per avere il punto d'equilibrio si potrà far uso dell'equazione $gdy + \frac{g^2 ddx}{ds} + zds + \frac{gzddx}{dy} - \frac{ddx}{dy}(gx+A) = 0$. E la costante A si ritrova avvertendo che nel caso di $x = 0$ diventa $gx - \frac{g^2 dy}{2ds} + A = 0$; nel caso poi in cui la tangente del vertice B sia parallela all' ordinate facendo a dirittura $A = \frac{g^2}{2}$. Prop. 2 Corol. 1 Lib. IV.

Corollario 2.

Ed essendo come Lo a Ip, o come $z\mu$ a $n\mu$, così il peso MN di $KopI$ alla pressione MO sul contiguo $IpFH$, sarà $dy : dx :: zdy + \frac{gzddx}{ds} : MO$, e però $MO = zdx + \frac{gzdxddx}{dyds} = zdx - \frac{gzddy}{ds}$. E' manifesto però che le forze suddette MO, per cui ogni pezzo $KopI$ preme il contiguo $IpFH$, e le quali, come abbiamo detto, non sono valevoli ad alterare le pressioni della scala di tutti i pezzi su' loro rispettivi cunei, si uniscono tutte a premere il muro $X\Gamma ZWC\Sigma$, e cercano di muoverlo d' intorno al punto Z.

Corollario 3.

Ricerchinsi per esempio i punti d' equilibrio e la somma de' carichi contro la centina di una Volta intera a mezza botte AEC, di uniforme grossezza, compresa tra i due semicerchj concentrici ABC DEF, e caricata dalla scala de' pesi $GIMFED$ per tal modo che le rette verticali EI HK ecc. sieno tutte uguali ad una retta q e fra di loro. E' evidente che GIM sarà un altro semicerchio che ha per diametro il lato GM del rettangolo $GDFM$, essendo l' altro lato $DG = q$. E perchè fatta $BL = x$, $LN = y$, il raggio $BO = b$, s' ha l'equazione $y = \sqrt{(2bx - x^2)}$, sarà $dy = \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $ds =$ Fig. II. Tav. VI.

$\frac{bdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$, $\frac{dx}{ds}=\frac{1}{b}\sqrt{(2bx-x^2)}$, $\frac{ddx}{ds}=\frac{dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}}$, $\frac{ddx}{dy}=\frac{dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}$; e per l' ipotesi sarà $z=q$, e g costante.

Corol. 1 Quindi dovendo essere nel punto d' equilibrio $gdy+\frac{g^2ddx}{ds}+zds+\frac{gzddx}{dy}-\frac{ddx}{dy}(gx+\frac{g^2}{2})=0$, s' avrà colle sostituzioni $\frac{gdx(b-x)}{\sqrt{(2bx-x^2)}}+\frac{g^2dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}}+\frac{bqdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}+\frac{gqdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}-(gx+\frac{g^2}{2})\cdot\frac{dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}=0$, cioè $2bg(b-x)+2g^2(b-x)+2b^2q+2bgq-2bgx-bg^2=0$, ovvero $2b^2g-2bgx+2bg^2-2g^2x+2b^2q+2bgq-2bgx-bg^2=0$; e però si conseguirà $x=\frac{2b^2g+bg^2+2b^2q+2bgq}{4bg+2g^2}$; e per conseguenza se questo valore, ch' è reale e positivo, sia anche minore della saetta BO, sarà segno che da ciascuna parte della saetta v' ha un punto d' equilibrio, anzi tanti punti d' equilibrio nella Volta da una parte e dall' altra, quanti sono gli Archi o gli ordini de' cunei che la compongono. Sia la grossezza g della Volta $=\frac{b}{8}$, e la verticale costante $EI=q=\frac{b}{32}$, sarà $x=(\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{64}+\frac{b^2}{16}+\frac{b^2}{128}):(\frac{b^2}{2}+\frac{b^2}{32})=\frac{43b^2}{128}:\frac{17b^2}{32}=\frac{43}{68}b$; ma $\frac{43}{68}b$ è una quantità minore della saetta b, dunque presa $BL=\frac{43}{68}b$, e tirata l'ordinata NLP, vi saranno ne' punti N P della Volta due punti d' equilibrio; e similmente si determineranno altri ed altri punti d' equilibrio in tutti gli Archi che compongono la Volta. All' incontro se $g=q=\frac{b}{8}$, sarà

$x = \left(\frac{b^3}{4} + \frac{b^3}{64} + \frac{b^3}{4} + \frac{b^3}{32}\right) : \left(\frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{32}\right) = \frac{35b^3}{64} : \frac{17b^2}{32} = \frac{35}{34}b$, ch' è una quantità maggiore della saetta b, laonde in questa seconda supposizione non vi sarà alcun punto d' equilibrio nella Volta, e tutti i cunei premeranno la centinatura.

Perchè poi la somma de' carichi de' cunei corrispondenti all' ascissa x è $= gy + \frac{g^2 dx}{ds} + \int\left(zds + \frac{gzddx}{dy} - \frac{ddx}{dy}\left(gx + \frac{g^2}{2}\right)\right)$, sarà essa somma $= g\sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{g^2}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} + qs + \frac{gq}{b}\int\frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - g\int\frac{xdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{g^2}{2b}\int\frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} = \frac{bg + g^2}{b} \cdot \sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{(b+g)qs}{b} - g\int\frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} + g\int\frac{dx(b - x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{g^2 s}{2b} = \frac{bg + g^2}{b} \cdot \sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{(b + g)qs}{b} - gs + g\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{g^2 s}{2b} + T$ (T è la quantità costante aggiunta all' integrale): ovvero sarà la somma anzidetta $= \frac{bg + g^2}{b} \cdot \sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{(b+g)qs}{b} - s + g\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{g^2 s}{2b}$, perchè dovendo svanire quando x e però anche $s = 0$, diventa $T = 0$; o per fine sarà essa somma $= \frac{2bg + g^2}{b} \cdot \sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{(b + g)qs}{b} - \frac{(2b + g)gs}{2b}$, dove bisogna fare $x = BL$, e $s =$ all' arco BN, nel caso in cui N sia il punto d' equilibrio, per ritrovare la somma di tutte le pressioni che gravano la mezza centina BA. Quando poi tutti i cunei dalla sommità B all' impostatura A premano la centina, nè vi sieno punti d' equilibrio, si farà $x =$ alla saetta BO, e $s =$ all' arco BA onde determinare la somma sopraddetta.

COROLLARIO 4.

Fig. III. Tav. VI. Sia propoſto per ſecondo eſempio di cercare i punti d' equilibrio, e la ſomma delle preſſioni in una Volta intera a mezza botte *AEC* compreſa fra due ſemicerchj concentrici, la di cui ſcala de' peſi meſſi ſopra a' cunei termini nella retta orizzontale *EK* che tocca il ſemicerchio ſuperiore. Eſſendo pertanto l' equazione al ſemicerchio interiore preciſamente la ſteſſa che quella dell' eſempio antecedente, ſi avranno gli ſteſſi valori di ds, dy, $\frac{dx}{ds}$ ecc. che in quello. Perchè poi ſta come la *HO* alla *OR*, così la *ZO* alla *OV*, e la *HO* è uguale alla *EO*, e la *ZO* alla *OB*, ſarà come la *EO* alla *OR*, così la *OB* alla *OV*, e convertendo come $EO : ER :: OB : BV$; ma la *ER* è uguale alla *HK* cioè a z, dunque $b + g : z :: b : x$, e però $z = \frac{x(b+g)}{b}$; laonde ſoſtituendo gli opportuni valori nell' equazione de' punti d' equilibrio, dovrà eſſere $\frac{gdx(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}} + \frac{g^2dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}} + \frac{xdx(b+g)}{\sqrt{(2bx-x^2)}} + \frac{gxdx(b+g)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}} - \left(gx + \frac{g^2}{2}\right) . \frac{dx}{\sqrt{(2bx-x^2)}} = 0$, cioè $(2bg + 2g^2).(b - x) + (2bx + 2gx).(b + g) - 2bgx - bg^2 = 0$, e riducendo ſarà $2b^2g + bg^2 + 2b^2x = 0$; onde $x = -\frac{2bg + g^2}{2b}$, ch' è una quantità bensì reale, ma negativa: per conſeguenza non v' ha nella Volta alcun punto d' equilibrio, e tutti i cunei dalla ſommità *B* all' impoſtatura *A* premono la centina.

Di nuovo perchè la ſomma delle preſſioni de' cunei corriſpondenti all' aſciſſa x è $= gy + \frac{g^2dx}{ds} + \int\left(zds + \frac{gzddx}{dy} - \frac{ddx}{dy}\left(gx + \frac{g^2}{2}\right)\right)$ (Corol. 1), ſarà eſſa ſomma $= g\sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{g^2}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} + \int\left(\frac{xdx(b+g)}{\sqrt{(2bx-x^2)}} + \frac{gxdx(b+g)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}} - \frac{2gxdx + g^2dx}{2\sqrt{(2bx-x^2)}}\right) =$

$bg + g^2$

$\frac{bg + g^2}{b} \cdot \sqrt{(2bx - x^2)} + \int (2bx(b + g) + 2gx(b + g) - 2bgx - bg^2) \cdot \frac{dx}{2b\sqrt{(2bx - x^2)}} = \frac{bg + g^2}{b} \cdot \sqrt{(2bx - x^2)} + (2b^2 + 2bg + 2g^2) \cdot \int \frac{xdx}{2b\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{g^2}{2b} \int \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} = \frac{bg + g^2}{b} \cdot \sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{2b^2 + 2bg + 2g^2}{2b} \cdot \int \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{2b^2 + 2bg + 2g^2}{2b} \cdot \int \frac{dx(b - x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{g^2}{2b} \int \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$; ovvero integrando e aggiugnendo la costante R, sarà la somma de' carichi sulla centina $= \frac{bg + g^2}{b} \cdot \sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{2b^2 + 2bg + 2g^2}{2b} \cdot (s - \sqrt{(2bx - x^2)}) - \frac{g^2 s}{2b} + R$; ma quando $x = 0$, e però anche $s = 0$, tutto dee svanire, dunque $R = 0$; e però posta $x =$ alla saetta BO, e $s =$ al quadrante $AB = Q$, sarà finalmente la pressione totale de' cunei sulla centina dalla sommità all' impostatura $= bg + g^2 + \frac{2b^2 + 2bg}{2b} \cdot Q + \frac{2g^2 Q}{2b} - b^2 - bg - g^2 - \frac{g^2 Q}{2b} = (b + g) \cdot Q + \frac{g^2 Q}{2b} - b^2$. E bastino i due esposti esempli per conoscere il modo che si dee tenere anche ne' casi più composti.

S c o l i o.

Quanto giovamento possano apportare e le cose dimostrate nel secondo e quarto Libro, e quest' ultime, a chi vuole ben proporzionare la resistenza de' legnami, che compongono le centine, colla pressione che debbono sostenere, egli è per se stesso evidente. Noi però non facciamo qui che accennarlo per non allontanarci dalla materia di cui abbiamo intrapreso a trattare; per la qual cosa lasciate da parte le centinature, parleremo ora delle Volte disarmate di quelle.

PROBLEMA 5. PROPOSIZIONE 5.

Ritrovare la groſſezza da darſi alle muraglie verticali di una Volta intera circolare a mezza botte, che abbia la corda di 24 piedi, e la groſſezza di 3, eſſendo l' altezza delle muraglie medeſime di piedi 15.

Chiamata la coerenza aſſoluta di un piè quadrato di muro $= R$, il peſo di un piè cubico $= P$, l' altezza della muraglia verticale $= a$, e la ricercata groſſezza $= G$, ſi è provato che il momento della reſiſtenza della muraglia per la

Corol. Prop. 1 di queſto ſpeſſezza di un piede è $= \frac{aPG^2}{2} + \frac{G^2R}{2}$. Di nuovo ſi faccia il raggio interiore $12 = b$, l' eſteriore $12 + 3 = 15 = c$, il quarto della circonferenza del cerchio interiore $= Q$, e la groſſezza della muraglia, come prima, $= G$, per avere la ſomma de' momenti eſercitati contro al muro $= (c^2 - b^2)$.

Corol. 1 Prop. 17 Lib. III. $\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b + c)} + \frac{a}{2} - \frac{(G + b)Q}{2b}\right)$, ma queſto nella ſuppoſizione che i peſi ſieno rappreſentati dalla faccia; dunque dando alla faccia la ſpeſſezza di 1 piede, e introducendo il peſo di un piè cubo di muro, ſarà la ſomma de' momenti de' peſi contro alla muraglia groſſa 1 piede $= P(c^2 - b^2)$. $\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b + c)} + \frac{a}{2} - \frac{(G + b)Q}{2b}\right)$. Per la qual coſa dovendo la reſiſtenza uguagliare lo sforzo onde poter ottenere l' e-

Dom. II. di queſto quilibrio, ſarà vera l' equazione $= \frac{aPG^2}{2} + \frac{G^2R}{2} = P(c^2 - b^2)$. $\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b + c)} + \frac{a}{2} - \frac{(G + b)Q}{2b}\right)$; laonde ſoſtituendo i numeri, e ſupponendo ancora che il muro ſia fatto di tal pietra che ogni piè cubico peſi lib. 180, coſicchè $P = 180$ (che tal peſo aveva la pietra impiegata in uno de' tre ponti deſcritti dal Sig. *Perronet*), e di più facendo $R =$ lib. 1769, e

il quarto Q della circonferenza interiore $= \frac{132}{7}$, si conseguirà l'equazione $\frac{2700G^2}{2} + \frac{1769G^2}{2} = 14580\left(\frac{122}{9} + \frac{15}{2} - \frac{11G}{14} - \frac{66}{7}\right)$; e riducendo sarà $31283G^2 + 160380G = 2373300$, da cui si ricava il valor ricercato di $G = -\frac{80190}{31283} + V\left(\frac{2373300}{31283} + \left(\frac{80190}{31283}\right)^2\right) = 6\frac{16144}{31283}$, ovvero di piedi 6, e pollici 6 prossimamente; il che ecc.

S c o l i o.

Anche col metodo del de la Hire *seguito dal* Belidor *si trova, che una Volta delle dimensioni del problema ha d' avere la muraglia grossa 6 piedi e 6 pollici, veggasi* Belidor Prop. prémiere Chap. II. Liv. II. Science des Ingenieurs, *sicchè in questo caso conviene appuntino il mio metodo con quello di questi Autori. Sì l' uno che l' altro s' accordano poi qui con la pratica degli Architetti, i quali ad una Volta delle suddette dimensioni darebbero certamente la grossezza di piedi 6 e mezzo nè più nè meno. E questa cosa è vera così, che debbasi giudicar superfluo l' accrescimento di mezzo piede proposto dal* Belidor *alla calcolata grossezza di piedi 6 e mezzo per ridurre, com' ei si esprime nel luogo citato, la resistenza superiore alla spinta.*

PROBLEMA 6. PROPOSIZIONE 6.

Supposte le stesse cose dell' antecedente proposizione, trovare la grossezza superiore ed inferiore da darsi alle muraglie laterali della Volta, quando siano esternamente a scarpa di un quinto dell' altezza.

Essendo l' altezza della muraglia di piedi 15, sarà la sua scarpa di 3 piedi, e però chiamata la sua grossezza in sommità $= D$, e quella alla base $= G$, s' avrà $D + 3 = G$, e $D = G - 3$. In un muro poi a scarpa il momento della resistenza è $= \frac{aP}{6}(2G^2 + 2GD - D^2) + \frac{G^2R}{2}$, dunque sostituendo $G - 3$ in luogo di D, sarà la resistenza medesima $= \frac{aP}{6}(2G^2 + 2G^2 - 6G - G^2 + 6G - 9) + \frac{G^2R}{2} = \frac{aP}{6}(3G^2 - 9) + \frac{G^2R}{2}$: ma il momento totale contro al muro è $= P(c^2 - b^2)$. $\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b + c)} + \frac{a}{2} - \frac{(G + b)Q}{2b}\right)$; laonde uguagliando la resistenza del muro collo sforzo contro di esso, s'avrà l'equazione $\frac{aP}{2}(G^2 - 3) + \frac{G^2R}{2} = P(c^2 - b^2).\left(\frac{2c^2 + 2bc + 2b^2}{3(b + c)} + \frac{a}{2} - \frac{(G + b)Q}{2b}\right)$. In oltre per istare a' dati dell' antecedente essendo $a = 15$, $b = 12$, $c = 15$, $R = 1769$, $P = 180$, $Q = \frac{132}{7}$, s'avrà colla sostituzione e riduzione $31283G^2 + 160380G = 2430000$; laonde $G = -\frac{80190}{31283} + \sqrt{\left(\frac{2430000}{31283} + \left(\frac{80190}{31283}\right)^2\right)} = \frac{206948}{31283}$ prossimamente, e però sarà G di piedi 6 e pol. 8, e questa sarà la grossezza della muraglia in base; per conseguenza quella della sommità sarà di piedi 3 e pol. 8; il che ecc.

Prop. 1 di questo

Dom. II. di questo

PROBLEMA 7. PROPOSIZIONE 7.

Ritrovare la grossezza da darsi alle muraglie laterali di una Volta a mezza botte e a sesto acuto della comune costruzione, la cui corda

sia di piedi 24, la grossezza di piedi 3, e l' altezza delle muraglie verticali di piedi 15.

Si chiami la semicorda $Am = 12 = b$, il raggio interiore AD del semiarco $AS = r$, la grossezza $SX = 3 = g$; il peso di un piè cubo della materia della Volta e de' muri = lib. $180 = P$; e la coerenza assoluta di un piè quadrato di muro = lib. $1769 = R$. E perchè la mD nell' ordinaria costruzione delle Volte composte è la metà della Am, sarà $AD = DS = r =$ piedi 18, e tutta la $DX = DZ =$ piedi 21; sicchè nel triangolo rettangolo SmD essendo data l' ipotenusa DS e il cateto Dm di piedi 6, sarà l' altro cateto Sm, o la saetta della Volta uguale prossimamente a piedi 17: e sia $Sm = 17 = n$, l' altezza del muro $AW = a$, e la sua grossezza $= G$; e si supponga ciascun ordine della Volta diviso in un numero infinito di cunei. Si troverà in prima che nella spessezza di un piede la resistenza del muro diventa $= \frac{aPG^2}{2} + \frac{G^2R}{2}$. Fig. VII. Tav. III. Scol. Prop. 1 di questo

Si sono nella prop. 7 Lib. V. distinti tre casi nel determinare la somma de' momenti delle forze che operano contro al pilastro o al muro AW, e sono questi: o il serraglio preme tanto il cuneo laterale quanto da esso è premuto, o il preme più, o finalmente meno. Per ciascun caso si è ritrovata una formola differente data per le cognite che in questa proposizione si è avuto l' avvertenza di nominare colle stesse lettere della citata; onde innanzi a tutto bisogna rintracciare a qual de' tre appartenga la Volta ASC. Suppongasi però che il serraglio sia dello stesso materiale de' cunei, e dello stesso peso specifico, cioè che il suo peso assoluto sia proporzionale all' area che lo rappresenta.

Pertanto risoluto il triangolo SmD, si avrà l' angolo SDm di 70°, 32', e l' angolo $mSD = 19°$, 28' circa; e però il supplemento a due retti $DSZ = 160°$, 32'. E perchè la circonferenza del cerchio del raggio AD secondo la proporzione di Archimede è $= \frac{36 \cdot 22}{7}$, facendo come 360° all' angolo SDm di 70°, 32', così la circonferenza medesima ad un quar-

to proporzionale, farà questo uguale all' arco *AS*, e però $AS = \frac{399}{18}$ proſſimamente. Ora nel triangolo *DSZ* eſſendo data la *DS* di piedi 18, la *DZ* di 21, e l' angolo *DSZ* di 160°, 32', ſi troverà l' angolo *ZDS* di 2°, 52', e la *ZS* di piedi 3, 151^{IV}: laonde moltiplicando la *ZS* per la metà della *Dm* s' avrà l' area del triangolo *ZDS* di piè quadrati 9,453^{IV}. Di nuovo perchè l' area del cerchio del raggio *DZ* è $= \frac{11 \cdot 42 \cdot 42}{14} = 1386$, ſe ſi farà come 360° all' angolo *ZDS* di 2°, 52', così la detta area ad un quarto proporzionale, ſi conſeguirà il ſettore $ZDX = \frac{172 \cdot 1386}{360 \cdot 60} = 11, 036^{IV}$; da cui togliendo l' area del triangolo *ZDS* già determinata, reſterà lo ſpazio $ZSX = 1, 583^{IV}$; per conſeguenza tutta l' area *XSY* del ſerraglio, ch' è doppia di *ZSX*, farà $= 3, 166^{IV}$: ſicchè ponendoſi all' area proporzionale il peſo, s' avrà il peſo del ſerraglio $XSY = 3, 166^{IV}$. In oltre riſolvendo queſto peſo al ſolito modo, ſi conoſcerà ch' eſſo ſta alla preſſione ſu' cunei laterali, come il ſeno del doppio angolo *SDm* al ſeno dell' angolo medeſimo *SDm*; laonde con queſta analogia ſi determinerà la preſſione del ſerraglio ſopra uno de' cunei laterali e farà $= 4\frac{3}{4}$. Per conſeguire poi quella del cuneo ſopra di eſſo ſi farà uſo dell' eſpreſſione $gn + \frac{g^2 n}{2r}$, che la uguaglia per le coſe provate nella ſoprammentovata prop. 7 Lib. V., e che ſoſtituendo i numeri ſi farà $= 3 \cdot 17 + \frac{9 \cdot 17}{2 \cdot 18} = 51 + \frac{17}{4} = 55\frac{1}{4}$; ma ſi è trovata la preſſione del ſerraglio ſul cuneo laterale ſolo $= 4\frac{3}{4}$; ſi conchiuderà dunque che il ſerraglio preme meno il cuneo laterale di quello ſia da eſſo premuto, e che qui ſi verifica il terzo de' caſi contemplati; per

conseguenza riuscirà la differenza delle stesse pressioni $= 55\frac{1}{4} - 4\frac{3}{4} = 50\frac{1}{2}$.

Se fermo il raggio interiore *DA* di 18 piedi si aumenti o si diminuisca la grossezza dell' Arco, vedremo verificarsi sempre il caso suddetto; e lo stesso accaderà se fermo il raggio interiore e la grossezza, si faccia uguale ad un numero finito la somma de' cunei da ciascuna parte dell' Arco, non infinita come in prima si è supposto; tutte cose che possono praticamente riscontrarsi. Dal che apparisce dover sempre accadere il terzo de' casi contemplati nella prop. 7 Lib. V. quando il serraglio sia della stessa gravità specifica de' cunei; per la qual cosa non potranno accadere gli altri due casi, se non quando per avventura fosse il serraglio caricato superiormente da qualche peso straniero, che accrescendo la pressione di esso su' cunei laterali giungesse o ad uguagliar l' altra de' cunei contro di esso, o ancora a superarla. Quindi nella Volta *ASC* si dovrà fare la trovata differenza $50\frac{1}{2}$ tra le pressioni del serraglio e del cuneo laterale $= q$; poi sostituire questo valore e gli altri nella formola appartenente al caso terzo, ch'è $\frac{P(2gr + g^2)}{r} . \left(\frac{6gnr + 6r^2n + 2g^2n}{3(2r + g)} - \frac{G + r}{2r} . (r . AS + n(r - b)) + \frac{an^2}{2r}\right) + \frac{qP(G + r) . (r - b)}{r} + aqnP(r - b)^2 : \left(\frac{6gr + 6r^2 + 2g^2}{3(2r + g)} . r^2 - r(r - b)^2\right)$ per avere la somma de' momenti contro al muro *AW*; indi farla uguale alla resistenza $\frac{aPG^2}{2} + \frac{G^2R}{2}$ del muro medesimo, fin dal bel principio determinata, per ottenere l' equazione ridotta $4469G^2 + 26505G = 611295$, che risoluta darà la grossezza *G* della muraglia di piedi 9 prossimamente. Ma siccome la pratica insegna essere alquanto soverchia questa grossezza, così conviene ricercarne la cagione.

Nel secondo stato degli Archi e delle Volte, cioè dopo che sono state disarmate le centine, si è dimostrato che tutti i cunei lasciati in balía di se stessi sfiancano, ed hanno bisogno della sopraccentina che li sostenga; il solo serraglio non è a sfiancamento soggetto sempre che la tangente al rigoglio sia all' ordinate parallela. Ma se ciò non sia, può ancora accadere che lo stesso serraglio sia spinto fuori dell' Arco, come appunto si è dimostrato per gli Archi composti nell' ipotesi che il serraglio sia della stessa gravità specifica de' cunei. E questa forza che lo spigne all' insù da una parte e dall' altra non è sì picciola, imperciocchè nella Volta *ASC* essa è proporzionale a $50\frac{1}{2}$ piè quadrati, e però nella grossezza di un piede sarà di $50\frac{1}{2}$ piè cubi, che a ragione di lib. 180 per piè cubo importano lib. 9090. Quindi è che avendo noi voluto sostenere questa forza colla sopraccentina collocata dalla parte medesima, abbiamo di tanto accresciuta la somma de' momenti contro a' muri, che questo accrescimento portò una grossezza alquanto eccedente il bisogno. Pertanto se, in luogo di sostenere lo sfiancamento del serraglio colla sopraccentina, s' intendesse messo sopra di esso tal peso straniero, che giugnesse ad equilibrarsi precisamente colla forza sfiancante; allora il serraglio premerebbe tanto il cuneo laterale, quanto da esso è premuto; e però bisognerebbe ricorrere alla formola pel caso primo della citata prop. 7 Lib. V. Così in fatti facendo, ci avvicineremo di più alla pratica e al vero; e per conseguenza negli Archi e nelle Volte composte sarà bene di introdurre un' eccezione alla regola generale di sostenere tutti gli sfiancamenti colla sopraccentina; e giacchè un peso straniero collocato di sopra può impedire che il serraglio non isfianchi, siaci permesso di supporre questo peso, e di prescindere dalle sopraccentine per conto suo. Quindi valendoci di questa supposizione e della formola pel caso primo, sarà la somma de' momenti contro a' pilastri $= \frac{P(2gr+g^2)}{r} . \left(\frac{6gnr + 6r^2n + 2g^2n}{3(2r+g)} - \frac{G+r}{2r} . (r . AS + n(r-b)) \right)$

$+ n(r-b)) + \frac{an^2}{2r}\Big)$, la qual somma fatta uguale alla resistenza del muro $\frac{aPG^2}{2} + \frac{G^2R}{2}$, somministrerà un' equazione in cui sostituiti i valori delle cognite, ed eseguite le opportune riduzioni si avrà l'equazione del secondo grado $4469G^2 + 32565G = 472845$; laonde $G = -\frac{32565}{8938} + V\Big(\frac{472845}{4469} + \big(\frac{32565}{8938}\big)^2\Big) = \frac{64970}{8938} =$ piedi 7 e pollici 3 prossimamente; questa e non altra dovrà dunque essere la grossezza da assegnarsi alle muraglie della proposta Volta a sesto acuto.

S C O L I O.

Belidor prop. seconde Chap. III. Liv. II. *non trova pe' muri di questa Volta composta che la grossezza di piedi 5 pol. 3, anzi di piedi 5 pol. 9. stante la solita sua aggiunta di pol. 6 oltre la misura data dal calcolo, ch' è ancora minore della nostra di piedi 7 pol. 3 per piedi 1 e mezzo. Giudicheranno gli architetti colla scorta dell' esperienza se più di esso al vero m' avvicino.*

C O R O L L A R I O.

E' manifesto però che negli Archi o nelle Volte composte il serraglio o i serragli vengono spinti all' insù con una forza notabile che bisognerà sostenere con qualche peso superiore, perchè l' Arco o la Volta non rovini.

PROBLEMA 8. PROPOSIZIONE 8.

Data una Volta a mezza botte di qualsivoglia curvatura e di uniforme grossezza, ritrovare la scala de' pesi da mettersi sopra i cunei, affinchè le pressioni loro s' equilibrino rispettivamente cogli sfiancamenti proprj de' cunei.

Fig. I. Tav. VI. Sia $CGBDF\Sigma$ una Volta a mezza botte di qualunque curvatura interiore BGC, e di uniforme groſſezza: biſogna trovare la ſcala $AX\Sigma D$ de' peſi per tal modo che ogni cuneo della Volta ſia tanto premuto dal peſo ſuperiore, quant' è la grandezza del ſuo sfiancamento, ſicchè dalla ſerie de' peſi ſuperiori ſieno obbligati i cunei a ſtar fermi nella loro ſituazione ſenza biſogno di alcuna ſopraccentina.

Sia $opzn$ un cuneo qualſivoglia, e $KopI$ il peſo, che lo preme; e ſi faccia al ſolito la $B\pi = x$, la $\pi n = y$, la groſſezza uniforme della Volta $= g$, la $n\mu = dx$, la $z\mu = dy$, la $nz = ds$; ſarà $dg = 0$, e lo sfiancamento del cuneo medeſimo (Prop. 4 Lib. V.) $opzn = \frac{ddx}{dy}\int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}\cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right) = \frac{ddx}{dy}\left(2gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy}{ds}\cdot\frac{dyds}{ddx} + \int\frac{gdsdyddy}{dsddx} + A\right) = \frac{ddx}{dy}\left(gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A\right)$, dove A è la coſtante aggiunta all' integrale. Ma chiamata l' altezza $Ko = z$, riſulta la preſſione del peſo $KopI$ ſul piano inclinato (Prop. 4 di queſto) $op = zds + \frac{gzddx}{dy}$; dunque dovendo eſſere equilibrio coſtante in ogni cuneo tra la preſſione e lo sfiancamento, s' avrà $zds + \frac{gzddx}{dy} = \frac{ddx}{dy}\left(gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A\right)$, dalla qual equazione ſi ricava $z = \frac{ddx}{dsdy + gddx}\cdot\left(gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A\right)$; e la coſtante A ſi determinerà ſul fondamento, che quando ſia $x = 0$, debbe eſſere $\int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}\cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right)$, ovvero la quantità $gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A$, che eſprime la ſpinta relativa, uguale eſſa pure a zero. (Corol. 2 Prop. 4 Lib. V.)

Per la qual coſa ſe dalla ſommità interiore B della Volta ſi conduca la BV parallela alla corda, e ſi faccia l' aſciſſa Br corriſpondente al punto K della linea $AX = t$, e l' ordinata $Kr = u$, ſi determinerà l' equazione alla linea medeſima AX nel ſeguente modo. Poichè il triangolo $nz\mu$ è ſimile

al triangolo ons, sarà come $nz : z\mu :: on : os$, ovvero $ds : dy ::$ $g : \frac{gdy}{ds} = os$; e però aggiunta la Ko, sarà tutta la $Ks = z + \frac{gdy}{ds} =$ $\frac{ddx}{dsdy + gddx} \cdot \left(gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A\right) + \frac{gdy}{ds} = \frac{ddx}{dsdy + gddx} \cdot (gx +$ $A)$; ma $B\pi = rs = x$, dunque la rimanente Kr ovvero $u =$ $\frac{ddx}{dsdy + gddx} \cdot (gx + A) - x$. Di nuovo perchè come $zn : n\mu ::$ $on : ns$, s' avrà $ns = \frac{gdx}{ds}$, laonde la πs, o l' ascissa $Br = t$ $= \frac{gdx}{ds} + y$. Essendo date pertanto le t u per funzioni di x y, ed essendo data la natura della curva BC, o sia la relazione tra le x y, potremo, sviluppando le due ritrovate equazioni, ridurci ad una finale equazione tra t u, che sarà l' equazione alla linea ricercata AX; il che ecc.

Corollario I.

Essendo infinitesimi del secondo ordine gli sfiancamenti proprj de' cunei infinitamente vicini al serraglio, la linea AX debbe necessariamente passare pel punto D della sommità della curva esteriore, e ivi incontrare la Volta. Corol. I Prop. 4 Lib. V.

Corollario 2.

Gioverà qui per maggior chiarezza proporre un esempio. Sia CBR una Volta semicircolare a mezza botte; bisogna ritrovare la scala de' pesi da mettersi sulla Volta, perchè le pressioni loro sieno in equilibrio co' rispettivi sfiancamenti de' cunei. Chiamata la semicorda e la saetta $= b$, s' avrà l' equazione $y = \sqrt{(2bx - x^2)}$ alla curva interiore, dalla quale risulta $dy = \frac{(b-x)dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $ds = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{b-x}{b}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}$, $dsdy = \frac{(b-x)bdx^2}{2bx - x^2}$, $ddx = \frac{(b-x)dx^2}{2bx - x^2}$, Fig. IV. Tav. VI.

$\frac{dy^2}{ddx} = b - x$, $\frac{ddy}{ds} = -\frac{dx}{b}$; e però $\frac{ddx}{dsdy + gddx} = \frac{(b-x)dx^2}{2bx - x^2}$: $\left(\frac{(b-x)bdx^2}{2bx - x^2} + \frac{(b-x)gdx^2}{2bx - x^2}\right) = \frac{b-x}{(b+g).(b-x)} = \frac{1}{b+g}$. Diverrà ancora $gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A = gx - \frac{g^2(b-x)}{b} - bg + gx + A$; ma quando $x = 0$, tutto dee svanire, laonde la costante $A = g^2 + bg$; quindi $gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A = 2gx + \frac{g^2x}{b} = \frac{(2bg + g^2)x}{b}$; e però $z = \frac{ddx}{dyds + gddx}.\left(gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A\right) = \frac{1}{b+g}.\frac{(2bg + g^2)x}{b} = \frac{2bgx + g^2x}{b^2 + bg}$.

In oltre sarà $u = \frac{ddx}{dsdy + gddx}.(gx + A) - x = \frac{1}{b+g}.(gx + g^2 + bg) - x = \frac{g^2 + bg - bx}{b+g}$; e parimenti sostituendo sarà $t = \frac{gdx}{ds} + y = \frac{g}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} + \sqrt{(2bx - x^2)} = \frac{b+g}{b}.\sqrt{(2bx - x^2)}$. E poichè $u = \frac{g^2 + bg - bx}{b+g}$, sarà $x = \frac{(b+g).(g-u)}{b}$: ma $t = \frac{b+g}{b}.\sqrt{(2bx - x^2)}$, dunque sostituendo nel valore di t il valore di x dato per u, si conseguirà un' equazione tra t e u, che sarà $t = \frac{b+g}{b}.\sqrt{\left(2(b+g).(g-u) - \frac{(b+g)^2.(g-u)^2}{b^2}\right)}$; e quadrando e riducendo s' avrà $\frac{b^2t^2}{(b+g)^2} = 2(b+g).(g-u) - \frac{(b+g)^2.(g-u)^2}{b^2}$; e però $b^2 - \frac{b^2t^2}{(b+g)^2} = b^2 - 2(b+g).(g-u) + \frac{(b+g)^2.(g-u)^2}{b^2} = \left(b - \frac{(b+g).(g-u)}{b}\right)^2$; e $\frac{b^4}{(b+g)^2} - \frac{b^4t^2}{(b+g)^4} = \left(\frac{b^2}{b+g} - (g-u)\right)^2$; e risolvendo in

analogia ſarà $\left(\frac{b^2}{b+g}-(g-u)\right)^2 : (b+g)^2 - t^2 :: \frac{b^4}{(b+g)^2} : (b+g)^2$, il che dimoſtra che la ſcala de' peſi dee terminare ad un' eliſſi *GDX* da coſtruirſi nel ſeguente modo.

Sopra il centro *F* ſi prenda nella ſaetta la $FE = \frac{2bg+g^2}{b+g}$, e ſi compia il rettangolo *OX*, indi co' ſemiaſſi *GE ED* ſi coſtruiſca la mezza eliſſi *GDX*: dico che ſe la ſcala de' peſi terminerà all' eliſſi ſuddetta, le loro preſſioni ſaranno riſpettivamente in equilibrio cogli sfiancamenti de' cunei. Imperciocchè tirata dalla ſommità interiore *B* la *BH* parallela alla corda, e la *IHP* perpendicolare alla *BH*; poi fatta $BH = EP = t$, $HI = u$, eſſendo la retta $DF = b+g$, e la $FE = \frac{2bg+g^2}{b+g}$, ſarà il ſemiaſſe minore $DE = \frac{b^2}{b+g}$, e il maggiore *GE* ſarà uguale alla $FO = b+g$: ma ſarà la $KI = DB - HI = g - u$; laonde $IP = DE - KI = \frac{b^2}{b+g} - (g-u)$; quindi eſſendo per proprietà dell' eliſſi $(IP)^2 : (GE)^2 - (EP)^2 :: (DE)^2 : (GE)^2$, ſarà, ſoſtituendo, $\left(\frac{b^2}{b+g}-(g-u)\right)^2 : (b+g)^2 - t^2 :: \frac{b^4}{(b+g)^2} : (b+g)^2$ come di ſopra; dunque ecc.

PROBLEMA 9. PROPOSIZIONE 9.

Poſto che ſopra una Volta a mezza botte di uniforme groſſezza ſia collocata una ſcala di peſi ſecondo il ſenſo dell' antecedente propoſizione, trovare la ſomma de' momenti contro a' muri laterali della Volta medeſima.

Sia la Volta a mezza botte *CGBDFΣ* di uniforme groſſezza caricata da una ſcala di peſi terminati alla linea *AX* ſecondo il ſenſo dell' antecedente propoſizione; e ſia ancora al ſo- Fig. I. Tav. VI.

lito la saetta $Bx = n$, l' altezza interiore CW della muraglia $= \varepsilon$, la $B\pi = x$, la $\pi n = y$, la grossezza costante $oi = g$, la $Ko = z$, la $n\mu = dx$, la $z\mu = dy$, e la $nz = ds$:

Prop. ant. sarà $z = \frac{ddx}{dyds + gddx} . \left(gx - \frac{g^2 dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A \right)$.

Pertanto la gravità MN del pezzo $KopI$ appartenente ad essa scala de' pesi si divide in due forze, una MP che s' impiega a premere il cuneo corrispondente $opzn$, e che in questa supposizione viene equilibrata dallo sfiancamento proprio del cuneo, l' altra MO che opera per una direzione perpendicolare alla Zq, e cerca muovere il muro $X\Gamma ZWC\Sigma$ d' intorno al punto Z. In oltre perchè la detta pressione MO contro il muro si fa per la direzione Mq, ponendosi iu M il centro di gravità di $KopI$, sarà il suo momento uguale al prodotto di MO per la retta Zq. Di nuovo perchè la $M\Gamma$ è prossimamente uguale alla MN, e la $M\Gamma$ è la metà della $S\Gamma$ o della Ko, sarà $MN = \frac{z}{2}$: la somiglianza poi de' triangoli osn $nz\mu$ dà la $os = \frac{gdy}{ds}$; ed è altresì la retta $\pi x = n - x$, e la $CW = \varepsilon$; laonde tutta $Zq = MN + os + \pi x + CW = \frac{z}{2} + \frac{gdy}{ds} + n - x + \varepsilon$:

Corol. 2 Prop. 4 di questo ma la pressione MO del pezzo $KopI$ sull' inferiore $IpFH$ e sul muro è $= zdx - \frac{gzddy}{ds}$; dunque il momento di lei sarà $= \left(zdx - \frac{gzddy}{ds} \right) . \left(\frac{z}{2} + \frac{gdy}{ds} + n - x + \varepsilon \right)$; e però la somma di tutti i momenti contro al muro, che chiamo (S), sarà $= \int \left(zdx - \frac{gzddy}{ds} \right) . \left(\frac{z}{2} + \frac{gdy}{ds} + n - x + \varepsilon \right)$; facendo dopo l' integrazione $x =$ alla saetta n.

Oltre a ciò supponendosi esser tale la scala de' pesi, che tutte le loro pressioni su i cunei sieno rispettivamente in equilibrio cogli sfiancamenti, sarà essa scala l' uffizio di sopraccentina sostenendo gli sfiancamenti medesimi: resterà però la spinta relativa della mossa in libertà di operare sul pila-

ſtro o ſul muro; e però conviene tener conto anche del momento di lei. E poichè eſſa ſpinta relativa nel caſo di g coſtante diventa $= \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds} + \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{dy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right)$, Corol. 2 Prop. 4 Lib. V.
ſarà integrando $= \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{ds} + gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A = gx + A$; la perpendicolare poi condotta dal punto Z ſulla direzione della ſpinta relativa della moſſa è $= \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right)$. Prop. 3 Lib. V.
$\left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(\alpha + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)$, purchè ſi faccia $x =$ alla ſaetta n, e $y =$ alla ſemicorda b, ovvero $= \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{\alpha dy}{ds} - \frac{Gdx}{ds}$; dunque ſarà il momento della ſpinta relativa medeſima, che dico $= (T)$, $= (gx + A) . \left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{\alpha dy}{ds} - \frac{Gdx}{ds}\right)$, dove dopo di avere colle ſoſtituzioni fatto ſvanire tutte le quantità differenziali, ſi farà di nuovo $x = n$, e $y = b$. E queſta eſpreſſione del momento della ſpinta relativa può riuſcire e poſitiva, e negativa, ſecondo che la ſua direzione paſſi fuori della baſe del muro, o cada dentro di eſſa. In qualſivoglia di queſti due caſi però biſognerà unirla co' ſuoi proprj ſegni alla ſomma de' momenti delle forze MO onde avere in $(S) + (T)$ la ſomma totale de' momenti delle forze che operano ſul muro $X\Gamma ZWC\Sigma$; il che ecc.

C o r o l l a r i o I.

Sia pertanto la Volta a mezza botte ſemicircolare CBR caricata di peſi che terminino alla mezza eliſſi GDX deſcritta nel modo che ſi è inſegnato nel corol. 2 della prop. antecedente, affinchè le loro riſpettive preſſioni ſi equilibrino cogli ſfiancamenti proprj de' cunei; e domandiſi la ſomma de' momenti contro il muro CZ. Sarà dunque per le coſe dette nel luogo citato $z = \frac{2bgx + g^2x}{b^2 + bg}$; laonde preſa la ſaetta $n = b$, Fig. IV. Tav. VI.

e fatte le opportune sostituzioni, sarà $(S) = \int \left(\frac{2bgxdx + g^2xdx}{b^2 + bg} \right.$ $\left. + \frac{2bg^2xdx + g^3xdx}{b^3 + b^2g} \right) . \left(\frac{2bgx + g^2x}{2(b^2 + bg)} + \frac{g(b - x)}{b} + b - x + a \right) =$ $\frac{(2bg + g^2) . (b + g)}{b^2(b + g)} . \int xdx . \left(\frac{2bgx + g^2x}{2(b^2 + bg)} + \frac{b + g}{b} . (b - x) + a \right)$ $= \frac{(2bg + g^2)^2}{2b^2(b^2 + bg)} . \int x^2dx + \frac{(2bg + g^2) . (b + g)}{b^3} . \int (bxdx - x^2dx)$ $+ \frac{(2bg + g^2)a}{b^2} . \int xdx = \frac{(2bg + g^2)^2 . x^3}{6b^2(b^2 + bg)} + \frac{(2bg + g^2) . (b + g)}{b^3} .$ $\left(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + \frac{(2bg + g^2)ax^2}{2b^2}$, nè aggiungo costante perchè tutto svanisce quando $x = 0$; quindi fatta $x = b$, s' avrà finalmente $(S) = \frac{(2bg + g^2)^2}{6(b + g)} + \frac{(2bg + g^2).(b + g)}{6} + \frac{(2bg + g^2)a}{2} =$ $\frac{2bg + g^2}{6} . \left(\frac{2bg + g^2}{b + g} + b + g + 3a \right)$. Di nuovo, sostituendo; si conseguirà $(T) = (gx + g^2 + bg) . \left(\frac{3bg + 2g^2}{6b + 3g} + \frac{a(b - x)}{b} - \right.$ $\left. \frac{G}{b} \sqrt{(2bx - x^2)} \right)$, e fatta $x = b$, sarà $(T) = (2bg + g^2)$. $\left(\frac{3bg + 2g^2}{3(2b + g)} - G \right) = \frac{3bg^2 + 2g^3}{3} - G(2bg + g^2)$: quindi $(S) + (T)$, o la somma totale de' momenti contro al muro CZ, riuscirà $= \frac{2bg + g^2}{6} . \left(\frac{2bg + g^2}{b + g} + b + g + 3a - 6G \right) + bg^2 + \frac{2g^3}{3}$; il che ecc.

Corollario 2.

Fig. cit. Ma si passi dalla teoria a qualche pratica, e si ricerchi qual grossezza debba avere il muro di una Volta semicircolare a mezza botte CBR, su cui superiormente sia stata collocata tale scala de' pesi, che le loro pressioni s' equilibrino rispettivamente

rispettivamente cogli sfiancamenti proprj de' cunei; la quale scala per le cose dimostrate terminerà alla mezza elissi GDX. Corol. 2 Prop. ant.
Sia poi la semicorda CF di piedi 12, la grossezza della Volta di piedi 3, l' altezza interiore della muraglia, che suppongo da ambe le parti verticale, $= 15$, il peso di un piè cubo del materiale sia = lib. 180, e la coerenza assoluta di un piè quadrato di muro sia = lib. 1769; sicchè $b = 12$, $g = 3$, $a = 15$, $P = 180$, $R = 1769$. Oltre a ciò si faccia la grossezza ZW della muraglia in base $= G$; e si supponga nel muro l' alzamento GV per renderlo atto a sostenere più facilmente i pesi superiori della Volta; e perchè $OG = FE = \frac{2bg + g^2}{b + g}$, e la $OV = G - g$, sarà il momento dell' alzamento GV ridotto a peso $= P.\frac{2bg + g^2}{b + g}.(G - g).\frac{G - g}{2}$ Corol. cit.
$= P.\frac{2bg + g^2}{2(b + g)}.(G - g)^2$: il momento poi della resistenza del muro $CVZW$ è $= \frac{aPG^2}{2} + \frac{G^2R}{2}$; dunque il muro resiste colla Corol. Prop. 1 di questo
somma de' momenti $\frac{aPG^2}{2} + \frac{G^2R}{2} + P.\frac{2bg + g^2}{2(b + g)}.(G - g)^2$:
ma questa resistenza debbe essere uguale alla somma de' momenti che operano contro il muro; per conseguenza s' avrà Dom. II. di questo

$$\frac{aPG^2}{2} + \frac{G^2R}{2} + P.\frac{2bg + g^2}{2(b + g)}.(G^2 - 2Gg + g^2) = \frac{P(2bg + g^2)}{6}.\left(\frac{2bg + g^2}{b + g} + b + g + 3a - 6G\right) + bg^2P + \frac{2g^3P}{3}$$

; laonde sostituendo i numeri sarà

$$\frac{15.180G^2}{2} + \frac{1769G^2}{2} + \frac{180.81.G^2}{30} - \frac{180.81.6G}{30} + \frac{180.81.9}{30} = \frac{180.81}{6}.\left(\frac{81}{15} + 12 + 3 + 45 - 6G\right) + 12.9.180 + \frac{2.27.180}{3}$$

, la qual equazione ridotta dà $5441G^2 + 23328G = 354456$, quindi $G = -\frac{11664}{5441}$

$+ \sqrt{\left(\frac{354456}{5441} + \left(\frac{11664}{5441}\right)^2\right)} = \frac{33774}{5441}$, cioè farà *G* di piedi 6, pol. 3 proffimamente.

S C O L I O 1.

Fig. IV. Tav. VI. Prop. 5 di quefto

Si è trovato in altro luogo, che a una Volta femicircolare a mezza botte non caricata efternamente di pefi, ma delle fteffe dimenfioni di quella del corol. antecedente, dovevafi affegnare a' muri la groffezza di piedi $6\frac{1}{2}$ *; e però il profilo del muro veniva ad effere di piedi quadrati* $97\frac{1}{2}$. *Nel cafo poi che la Volta fia caricata di pefi, che cogli sfiancamenti proprj de' cunei fi equilibrino, farà pel corol. medefimo la parte* CVZW *del muro alta piedi* 15 *e groffa piedi* $6\frac{1}{4}$, *onde la fuperficie del profilo farà di piedi quadrati* $93\frac{3}{4}$ *; ma l' altra parte* GV *del muro avendo l' altezza* $GO = FE = \frac{2bg + g^2}{b + g} = \frac{81}{15} = \frac{27}{5}$, *e la groffezza* OV *di piedi* $3\frac{1}{4}$, *avrà la fua fuperficie di piedi quadrati* $17\frac{11}{20}$ *; laonde la fuperficie di tutto il profilo del muro farà di piedi quadrati* $111\frac{3}{10}$ *: per confeguenza fi potrà pronunziare, che la fcala de' pefi addoffati alla Volta femicircolare* CBR, *e terminanti all' eliffi* GDX, *ha prodotto la neceffità di accrefcere la fuperficie del profilo del muro dai piedi* $97\frac{1}{2}$ *fino a'* $111\frac{3}{10}$, *cioè di piedi quadrati* $13\frac{8}{10}$.

S C O L I O 2.

Nell' antecedente propofizione fi è determinata la fcala de' pefi, che debbe foprapporfi a una Volta a mezza botte per foftenere gli

sfiancamenti proprj de' cunei; e s' è veduto che la curva della scala de' pesi addossati doveva necessariamente toccare la Volta nella sua sommità esteriore: ora si passerà a cercare la scala de' pesi da mettersi sopra la Volta, affinchè sia impedita ogni sorta di sfiancamento, e passi in oltre la curva della scala ad una data distanza dalla sommità esteriore; la qual indagine quantunque sia quasi la stessa della prima, e si possa collo stesso metodo risolvere, ciò nulla ostante altro se ne adoprerà per farci strada ad ulteriori ritrovamenti.

PROBLEMA 10. PROPOSIZIONE 10.

Determinare la scala de' pesi da soprapporsi a una Volta a mezza botte di uniforme grossezza e di qualunque curvatura interiore, sicchè sia impedito ogni sfiancamento e passi la curva della scala per un punto dato sopra la sommità esteriore della Volta.

Siano $opzn$ $pFGz$ due cunei infinitesimi contigui della Volta a mezza botte $CGBDF\Sigma$ di uniforme grossezza, e sieno superiormente aggravati dai pesi $KopI$ $IpFH$ della scala AKX, i quali annullino ogni sfiancamento; sieno poi gli archetti nz zG uguali fra di sè, e i punti a b sieno centri di gravità de' due cunei, e debba la curva AKX passare pel punto A posto sopra D alla distanza $AD = c$. Fig. I. Tav. VI.

Se le linee verticali uguali ac bd esprimano le gravità de' cunei, si è provato che il cuneo superiore $opzn$, prescindendo da' pesi che superiormente caricano la Volta, preme più l' inferiore contiguo $pFGz$ di quello sia da esso premuto; e chiamata la $B\pi = x$, la $\pi n = y$, la $n\mu = dx$, la $z\mu = dy$, la $nz = ds$, e la grossezza uniforme on della Volta $= g$, questa differenza di pressione vien espressa dalla quantità $2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$. Affinchè dunque i pesi superiori della Volta annullino ogni sfiancamento, conviene che sieno tali da proccurare, prescindendo dal peso de' cunei, una nuova Prop. I Lib. V.

pressione del cuneo inferiore sopra il superiore contiguo maggiore della nuova pressione del superiore sull' inferiore, e che la differenza di esse pressioni sia precisamente uguale alla prima differenza $2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$; poichè essendo queste differenze dirette da parti contrarie, si premeranno allora ugualmente sulla comune commessura i cunei fra di loro; e per conseguenza non potrà restare alcuna forza nella Volta che produca sfiancamento.

Ora sia $n\text{Æ}$ il raggio osculatore del punto n, e $z\ae$ quello del punto vicino z; sarà $n\text{Æ} = \frac{dyds}{ddx}$, e $z\ae = \frac{dyds}{ddx} + d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$. E perchè la $on = g$, s' avrà la $p\text{Æ} = \frac{dyds}{ddx} + g$, e la $p\ae = \frac{dyds}{ddx} + g + d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$; ma la zE sarà $= dx + ddx$, e la $EG = dy + ddy$; onde la $z\delta = y + dy$, e la $G\varphi = y + 2dy + ddy$; quindi fatta la $Ko = z$, è manifesto, che sarà similmente la $Ip = z + dz$, e la $FH = z + 2dz + ddz$.

E poichè la superficie $KopI$ o il peso del pezzo $KopI$ è $= \frac{Ko + Ip}{2} . Lo$; e come il peso di $KopI$ alla sua pressione sull' archetto op, così è la Lo alla op, sarà la sopraddetta pressione $= \frac{Ko + Ip}{2} . op$; e nella stessa guisa si proverà che la pressione dell' altro pezzo $IpFH$ sull' archetto pF è $= \frac{Ip + HF}{2} . pF$. In appresso facendosi le pressioni de' pezzi $KopI$ $IpFH$ sulla curva esteriore oF della Volta per direzioni perpendicolari agli archetti op pF, si potranno esse supporre dirette a' punti Æ $\ae$; laonde se si prendano dai centri di gravità a b sulle $a\text{Æ}$ $b\ae$, la $af = \frac{Ko + Ip}{2} . op$, e la $be = \frac{Ip + HF}{2} . pF$, dalle linee medesime af be saranno espresse le quantità e le direzioni delle pressioni de' pezzi sopra a' cunei. Di nuovo egli è noto, che unita la abg, e condotta dal punto a la ab perpendicolare alla com-

messura *on*, poi terminato il parallelogrammo *agsb*, esprimerà la *ag* la pressione con cui, dividendosi la forza *af*, vien premuto per suo conto il cuneo inferiore *pFGz* dal superiore *opzn*; ed allo stesso modo compiuto il parallelogrammo *bmel*, esprimerà *bl* la pressione con cui il cuneo inferiore preme il superiore in grazia del peso addossato *IpFH*; e però la differenza tra le *bl ag* debbe essere uguale a $2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$.

In oltre essendo il triangolo *gaf* simile al triangolo *Æpo*, sarà come $op : pÆ :: af : ag$, ovvero $op : pÆ :: \frac{Ko + Ip}{2}, op : ag$; e però la $ag = \frac{Ko + Ip}{2} . pÆ$, o sostituendo le lettere sarà essa $ag = \left(z + \frac{dz}{2}\right) . \left(\frac{dyds}{ddx} + g\right)$: similmente l' analogia della *pF* alla *pa*, come la *be* alla *bl* somministrerà la $bl = \frac{Ip + HF}{2}$. $pa = \left(z + \frac{3dz}{2} + \frac{ddz}{2}\right) . \left(\frac{dyds}{ddx} + g + d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right)$; dunque $bl - ag = \left(z + \frac{3dz}{2} + \frac{ddz}{2}\right) . \left(\frac{dyds}{ddx} + g + d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right) - \left(z + \frac{dz}{2}\right) . \left(\frac{dyds}{ddx} + g\right)$, ovvero riducendo e trascurando tutti gl' infinitesimi d' ordine superiore al primo sarà $bl - ag = dz\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) + z . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$; per conseguenza $dz\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) + z . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) = 2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$; e integrando coll' aggiunta della costante A, sarà $z\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) = gx - \frac{g^2 dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A$;

e la A ſi determinerà facendo nel caſo di $x = o$, z o la Ko uguale alla AD ovvero $= c$; il che ecc.

Corollario I.

E' manifeſto ancora che la preſſione ag, con cui ogni cuneo ſuperiore $opzn$ premerebbe l' inferiore $pFGz$ pel ſolo conto del carico $KopI$ che porta, quando non fuſſe da eſſo contropremuto, è $= \left(z + \frac{dz}{2}\right) \cdot \left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) = z\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right)$.

Corollario 2.

Fig. IV. Tav. VI. Sia per eſempio CDR una Volta ſemicircolare a mezza botte, che ha $y = \sqrt{(2bx - x^2)}$ per equazione alla curva interiore; debba poi paſſare la curva gAx della ſcala de' peſi addoſſati alla Volta pel punto A diſtante dalla ſommità eſteriore D per la linea $AD = c$. Sarà $dy = \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $ds = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{b-x}{b}$, $\frac{dyds}{ddx} = b$, e $\frac{dy^2}{ddx} = b - x$. Si prenda pertanto l'equazione $z\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) = gx - \frac{g^2dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A$, e ſi ſoſtituiſcano i valori ſuperiori per avere $z(b + g) = gx - \frac{g^2(b-x)}{b} - g(b - x) + A$; ma quando $x = o$, dee eſſere $z = c$, dunque $c(b + g) = - g^2 - bg + A$; e però $A = c(b+g) + g^2 + bg$; quindi $z(b + g) = gx - \frac{g^2(b-x)}{b} - g(b - x) + c(b + g) + g^2 + bg$, oſſia $z(b + g) = 2gx + \frac{g^2x}{b} + c(b + g)$; laonde $z = \frac{2bgx + g^2x}{b(b + g)} + c$. Ora per ritrovare l' equazione alla curva gAx ſi tiri dalla ſommità interiore B l' orizzontale $B\delta$, e fatta la $BH = t$, e la $Hi = u$,

si avranno le due equazioni $t = y + \frac{gdx}{ds}$, $u = z + \frac{gdy}{ds} - x$, Prop. 8 di questo

vale a dire $t = \sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{g}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} = \frac{b+g}{b}$. $\sqrt{(2bx - x^2)}$, e $u = \frac{2bgx + g^2x}{b(b+g)} + c + \frac{g(b-x)}{b} - x = c + g - \frac{bx}{b+g}$. Sicchè essendo data la relazione tra t u per x e le cognite, co' metodi soliti si passerà a trovare l' equazione tra le coordinate della curva gAx, e sarà per appunto la seguente $t^2 = \frac{(b+g)^2}{b^2} \cdot \left(2(b+g) \cdot (c+g-u) - \frac{(b+g)^2 \cdot (c+g-u)^2}{b^2}\right)$,

ovvero $(b+g)^2 - t^2 = \left(b + g - \frac{(b+g)^2 \cdot (c+g-u)}{b^2}\right)^2$, che somministra l' analogia $\left(\frac{b^2}{b+g} - (c+g-u)\right)^2 : (b+g)^2 - t^2 :: \frac{b^4}{(b+g)^2} : (b+g)^2$; e però la curva gAx è un' elissi da costruirsi così. Si prenda sul raggio FB la $Fe = c + \frac{2bg+g^2}{b+g}$, e compiuto il parallelogrammo rettangolo Ox, co' semiassi Ae ge si descriva la mezza elissi gAx che determinerà la scala de' pesi.

COROLLARIO 3.

Egli è poi manifesto, che da qualunque mezza elissi gAx Fig. cit. sia determinata la scala de' pesi addossati alla Volta semicircolare a mezza botte, purchè l' asse gx sia uguale e parallelo alla retta OY, sempre accaderà che le pressioni de' pesi della scala saranno in equilibrio co' rispettivi sfiancamenti de' cunei sottoposti.

Corollario 4.

Fig. I. Tav. VI. E se la curva AX non sia quella che fa nascere l' equilibrio ne' cunei, ma di qualunque natura, allora si potrà dire, che la differenza totale delle pressioni ch' esercitano due cunei contigui $opzn$ $pFGz$ fra di loro nella comune commessura è $= 2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - dz\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) - z \cdot d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$.

Corollario 5.

Quando la AD sia $= 0$, e il punto A debba cadere in D, s' avrà per l' equilibrio $z\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) = gx - \frac{g^2 dy}{ds} - \frac{gdy^2}{ddx} + A$, cioè la medesima equazione di prima, solo la costante A si determinerà in questo caso facendo, quando x sia $= 0$, anche $z = 0$, la qual equazione poi in tutto conviene coll' altra trovata nella proposizione 8 in cui erasi domandata la scala de' pesi da soprapporsi alla Volta a mezza botte, affinchè le pressioni di loro si equilibrassero cogli sfiancamenti proprj de' cunei. Non vi passa dunque altra differenza tra il problema della presente e quello della proposizione ottava, se non che ivi la curva della scala de' pesi passava per la sommità esteriore D della Volta, e qui per un punto A collocato ad una data distanza dal punto medesimo D. Solo in amendue questi stati pertanto la Volta e i pesi superiori possono reciprocamente sostenersi senza bisogno di sopraccentina; non così se la scala de' pesi non abbia quella relazione colla curva interiore, ch' è additata dall' equazioni di sopra ritrovate; anzi se non saranno i pesi sostenuti da una sopraccentina, si romperà ogni equilibrio, nè potrà sussistere la Volta; laonde per poter soggettare al calcolo il caso in cui la Volta a mezza botte sia caricata da una scala di pesi di qualsivoglia forma, converrà al solito supporre che vi sia esternamente adattata sù di essa scala la sopraccentina, ed attaccata fermamente dall' una parte e dall' altra alle muraglie laterali.

Corollario

COROLLARIO 6.

Per qualsivoglia punto *A* passi poi la curva della scala de' pesi, col metodo della prop. 9 e suo corol. 1 si potrà trovare la somma de' momenti delle forze che cercano rovesciare le muraglie d' intorno al punto *Z*, supposta però sempre uniforme la grossezza della Volta a mezza botte.

SCOLIO.

Non sono immeritevoli di qualche spezial riflessione queste tre ultime proposizioni sì per la loro novità, che per la generalità che abbracciano.

PROBLEMA II. PROPOSIZIONE II.

Data la curvatura interiore di una Volta a mezza botte di uniforme grossezza caricata esternamente da una scala di pesi di qualsivoglia forma, trovare la somma de' momenti delle forze che operano contro le muraglie laterali.

Sieno *opzn pFGz* due cunei infinitesimi sopra basi uguali *nz zG*, e *KopI IpFH* i pesi di cui sono caricati, sia poi qualsivoglia la curvatura interiore della Volta di uniforme grossezza, non che la scala de' pesi; conviene determinare la somma de' momenti delle forze che agiscono contro la muraglia $X\Gamma ZWC\Sigma$. Fig. I. Tav. VI.

Sia pertanto *at* uguale alla differenza delle pressioni ch' esercitano fra di loro i due cunei contigui *opzn pFGz* caricati da' pesi *KopI IpFH*. Si dimostrerà collo stesso metodo della proposizione 4 del Lib. V e suo corollario 2, che la spinta relativa di ciascun cuneo, eccettuata quella della mossa, è uguale alla somma o all' integrale di tutte le *at* dalla sommità fino a quella che corrisponde all' ascissa *x*; e si dimostrerà poi come nella prop. 5 del Libro medesimo che la somma de' momenti contro il muro laterale, risultanti dagli

sfiancamenti e dalla spinta relativa della mossa, è uguale alla somma de' momenti delle at, insieme col momento della forza colla quale la mossa $\omega\Sigma C\lambda$ preme l' impostatura per conto del solo suo proprio peso e del carico esteriore $X\Sigma\omega k$, che le sta sopra, niente computando i cunei e carichi superiori. In questo caso però vi sono ancora le forze MO che sono dirette contro lo stesso muro laterale; e però sarà d' uopo aggiugnere anche la somma de' momenti di queste alle due quantità in prima mentovate per avere la totale somma de' momenti contro al muro $X\Gamma ZWC\Sigma$.

1.° Sia dunque al solito la $B\pi = x$, la $\pi n = y$, la $Ko = z$, la $n\mu = dx$, la $z\mu = dy$, la $nz = ds$, la grossezza uniforme $on = g$, la saetta $Bx = n$, la semicorda $Cx = b$, l' altezza $CW = a$, e la grossezza ZW in base della muraglia $= G$; sarà la differenza at delle pressioni ch' esercitano fra di loro i cunei $opzn$ $pFGz = 2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - dz\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) - z . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)$. Di nuovo se dal punto Z si conduca la retta Zu perpendicolare alla at prolungata, sarà essa $Zu = \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)$; e però la somma de' momenti di tutte le forze at riuscirà $= \int\left(2gdx - \frac{g^2 ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - dz\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) - z . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right) . \left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)\right)$; dove dopo l' integrazione si farà $x = n$, $y = b$.

Corol. 4 Prop. ant.

Prop. 3 Lib. V.

2.° Per trovare poi la pressione ch' esercita la mossa $\omega\Sigma C\lambda$ sull' impostatura $C\Sigma$ per conto del solo suo proprio peso e del carico esteriore $X\Sigma\omega k$, indi il momento di detta pressione, sarà d' uopo procedere in una maniera simile a quella del corol. 2 prop. 4 Lib. V., se non che in questo caso bisognerà calcolare anche l' effetto che produce l' ultimo peso

$X\Sigma\omega k$ della scala sulla mossa medesima. Pertanto la pressione del solo peso della mossa sull' impostatura è $= \frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds}$ ch' è solo trascurabile quando l' impostatura sia orizzontale, come si dimostra nel luogo citato. In oltre perchè la forza con cui un cuneo superiore premerebbe l' inferiore, se non fosse da esso contropremuto, per la sola cagione del carico che gli sta sopra è $= z\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right)$, sarà la pressione esercitata dalla mossa $\omega\Sigma C\lambda$ sull' impostatura $C\Sigma$, pel solo conto del carico $X\Sigma\omega k$, uguale alla quantità medesima; laonde la pressione della mossa per conto del suo proprio peso e del carico esteriore $X\Sigma\omega k$ è uguale a $\frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds} + z\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right)$, purchè dopo l' opportune sostituzioni si renda x uguale alla saetta Bx, e y uguale alla semicorda Cx, cioè $x = n$, $y = b$; quindi moltiplicando questa pressione per la perpendicolare $Z\beta$ condotta dal punto Z sulla linea retta $\xi\beta$, che dal centro di gravità ξ della mossa si tira perpendicolare all' impostatura $C\Sigma$, la qual $Z\beta$ è $= \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(\alpha + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y) = \left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{\alpha dy}{ds} - \frac{Gdx}{ds}$, si avrà nel prodotto il momento ricercato della pressione suddetta, quando dopo le necessarie operazioni si faccia $x = n$, e $y = b$. Questo momento può riuscire positivo e negativo secondo che la direzione $\xi\beta$ cada fuori o dentro della base; sempre però si dovrà unire co' proprj segni alla quantità somministrata dal numero antecedente. Corol. 1 Prop. ant.

3°. Finalmente essendo la $MO = zdx - \frac{gzddy}{ds}$, e la $Zq = \frac{z}{2} + \frac{gdy}{ds} + n - x + \alpha$, sarà il momento della forza MO d' intor- Prop. 9 di questo

no al punto $Z = \left(zdx - \frac{gzddy}{ds}\right).\left(\frac{z}{2} + \frac{gdy}{ds} + n - x + a\right)$; e la ſomma de' momenti di tutte le $MO = \int\left(zdx - \frac{gzddy}{ds}\right).\left(\frac{z}{2} + \frac{gdy}{ds} + n - x + a\right)$, purchè dopo l' integrazioni ed altro ſi faccia $x = n$, $y = b$. Per conſeguenza aggiungendo queſta quantità a quelle ricavate ne' due numeri antecedenti, ſi conſeguirà il totale riſultamento de' momenti delle forze dirette contro al muro $XI'ZWC\Sigma$; il che ecc.

S c o l i o.

Fig. VI. Tav. VI. *Quando i peſi che ſtanno ſopra a' cunei non annullino gli sfiancamenti, e la ſcala de' peſi non ſia quella, che ſi è inſegnato a determinare nelle propoſizioni 8 e 10 di queſto, ma di qualſivoglia natura, egli è evidente che v' ha biſogno di una ſopraccentina per impedire la rovina della Volta a mezza botte; ſuppoſta poi queſta, ſarà bene dichiarare in qual modo ſi diſtribuiſcano le forze. Sia dunque* aA *la ſpinta relativa del cuneo* opzn *che per le coſe dette in queſta propoſizione, quando egli non ſia la moſſa, è* $= \int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds}.d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - dz\left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) - z \,.\, d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right)$, *e ſi compia il parallelogrammo* aBTA, *la cui diagonale* aT *ſia perpendicolare alla commeſſura* on, *e il lato* aB *diretto al centro* P: *eſprimerà* aB *lo sfianeamento del cuneo* opzn, *ovvero la forza e la direzione colla quale vien premuto il pezzo ſuperiore* KopI; *quindi condotta la* CD *uguale e per diritto alla* aB, *la* CE *verticale, e la* DE *perpendicolare alla* Ip, *è certo che la forza* aB *o la* CD *ſi divide nelle due* DE CE, *che la* ED *s' impiega contro il piano* Ip *e aggiugne sforzo contro la muraglia della Volta, e che la* CE *dinota la forza con cui è ſpinto all' insù il pezzo* KopI: *ma queſta forza viene poi ſoſtenuta dalla ſopraccentina* HK *e dal piano* Ko, *dunque condotta dal centro di gravità* Q *del pezzo medeſimo la verticale* QL *uguale alla* CE, *poi le linee rette* QR QV *perpendicolari alla curva* IK *e alla retta* Ko, *indi compiuto il pa-*

rallelogrammo QRLV, *esprimerà* QR *la pressione del pezzo* KopI *sulla sopraccentina, e* QV *la sua pressione sul piano* Ko, *la qual ultima forza toglie parte delle pressioni de' pezzi superiori contro la muraglia, e le riesce di benefizio. Perchè poi il punto* Z *sta di mezzo alle direzioni* QV QR *prolungate, sarà il momento della forza composta* QL *d' intorno al punto* Z *uguale alla differenza de' momenti delle forze* QR QV; *ma il momento di* QL *è lo stesso che il momento di* CE, *dunque il momento di* CE *è uguale alla differenza de' momenti delle forze* QR QV; *e aggiunto da ambe le parti il momento di* ED, *riusciranno i momenti delle* CE ED, *o il momento di* CD, *o di* aB, *uguali alla differenza de' momenti delle forze* QR ED *dal momento della forza* QV. *Per conseguenza tanto fa il tener conto dell' effetto della sola forza* aB, *che degli effetti delle tre* QR ED QV; *ed ecco perchè noi abbiamo considerato nella proposizione solo i momenti degli sfiancamenti e della spinta relativa della mossa, niente badando agli effetti che producono i primi ne' pezzi che soprastanno a' cunei.* Prop. 14 Lib. I.

PROBLEMA 12. PROPOSIZIONE 12.

In un magazzino da polvere dell' ordinaria costruzione determinare la grossezza delle muraglie laterali.

I magazzini da polvere si costruiscono di ordinario in modo che la Volta sia semicircolare a mezza botte, e la scala de' pesi sia terminata da ciascuna parte da una retta *DK* che tocca la curva esteriore nel punto *E* della metà della mezza Volta. Sia ora dato il raggio interiore $AI = b$, la grossezza uniforme della Volta $= g$, l'altezza *IN* de' muri laterali $= a$, sarà la saetta *AL* essa pure $= b$, e per facilità di calcolo si chiami il raggio esteriore $AE = b + g = c$. Fig. VII. Tav. VI.

Si dica dipoi al solito l' ascissa $LF = x$, l' ordinata $FB = y$, e la verticale *GO* che dal punto *G*, dove il raggio *AB* prolungato sega la curva esteriore, si conduce fino alla linea *DK* sia $= z$: s' avrà l' equazione $y = \sqrt{(2bx - x^2)}$, sicchè $dy = \frac{dx(b - x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $ds = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}$, $\frac{dy}{ds} =$

$\frac{b-x}{b}$, $\frac{ddy}{ds} = \frac{-dx}{b}$, $\frac{dy^2}{ddx} = b - x$, e il raggio osculatore $\frac{dyds}{ddx} = b$; laonde $d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) = 0$. Perchè poi come $BA : AF :: GA : AQ$, ovvero $b : b - x :: c : AQ$, sarà $AQ = \frac{c}{b}(b - x)$; e similmente l' analogia di $AB : BF :: AG : GQ$, o $b : y :: c : GQ$, darà $GQ = OH = \frac{cy}{b}$: ma essendo semiretto l' angolo EDA, la retta OH è uguale alla DH, dunque anche $DH = \frac{cy}{b}$; la AD poi è $= c\sqrt{2}$; per conseguenza $GO = HQ = AD - AQ - DH$ somministrerà l' equazione $z = c\sqrt{2} - \frac{c}{b}(b - x) - \frac{cy}{b} = \frac{c}{b}(b\sqrt{2} - b + x - y)$; e differenziando s' avrà $dz = \frac{c}{b}(dx - dy) = \frac{c}{b}\left(dx - \frac{dx(b-x)}{\sqrt{(2bx - x^2)}}\right)$.

Fatte tali preparazioni conviene applicare questo caso particolare alla generale risoluzione della proposizione antecedente, parte per parte, affine di trovare la somma de' momenti che operano contro alla muraglia IZ. E quanto alla prima parte, si troverà colle sostituzioni, $\int\left(2gdx - \frac{g^2ddy}{ds} - \frac{gdy}{ds} . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right) - dz . \left(\frac{dyds}{ddx} + g\right) - z . d\left(\frac{dyds}{ddx}\right)\right) . \left(\left(\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2\right) : \left(\frac{6dyds}{ddx} + 3g\right) + \frac{dy}{ds}(a + n - x) - \frac{dx}{ds}(G + b - y)\right)$, il qual integrale chiamo ancora (R), $= \int\left(2gdx + \frac{g^2dx}{b} - \frac{c^2dx}{b} + \frac{c^2dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx - x^2)}}\right) . \left(\frac{3bg + 2g^2}{6b + 3g} + \frac{b-x}{b} . (a + b - x) - \frac{G+b}{b} . \sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{2bx - x^2}{b}\right) = \int\left(\frac{c^2dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx - x^2)}} - bdx\right) . \left(\frac{6b^2 + 6bg + 2g^2}{3(2b + g)}\right.$

$+ \frac{\ae}{b}(b-x) - \frac{G+b}{b} . \sqrt{(2bx - x^2)}) = (\frac{c^2}{b}\sqrt{(2bx-x^2)} - bx)$. $\frac{6b^2 + 6bg + 2g^2}{3(2b+g)} + \int(\frac{c^2dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}} - bdx) . (\frac{\ae}{b}(b-x) - \frac{G+b}{b} . \sqrt{(2bx-x^2)})$. Inoltre è certo che $\int(\frac{c^2dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}} - bdx) . (\frac{\ae}{b}(b-x) - \frac{G+b}{b} . \sqrt{(2bx-x^2)}) = \int(\frac{\ae c^2dx(b-x)^2}{b^2\sqrt{(2bx-x^2)}} - \ae dx(b-x) - \frac{G+b}{b^2} . c^2dx(b-x) + dx(G+b) . \sqrt{(2bx-x^2)}$; ma $\int dx\sqrt{(2bx-x^2)} =$ allo spazio LBF, e $\int\frac{bdx}{\sqrt{(2bx-x^2)}} =$ all' arco LB; laonde $\int(\frac{c^2dx(b-x)}{b\sqrt{(2bx-x^2)}} - bdx) . (\frac{\ae}{b}(b-x) - \frac{G+b}{b} . \sqrt{(2bx-x^2)}) = \frac{\ae c^2}{b} . LB - \frac{\ae c^2}{b^2} . LBF - \ae bx + \frac{\ae x^2}{2} - \frac{c^2(G+b)}{2b^2} . (2bx - x^2) + (G+b) . LBF$, senza aggiungere costante, perchè quando $x = 0$, tutto svanisce; dunque fatta $x = AL = b$, il quarto di circonferenza $LI = Q$, e il quadrante $LAI = \frac{bQ}{2}$, sarà finalmente $(R) = (c^2 - b^2) . \frac{6b^2 + 6bg + 2g^2}{3(2b+g)} + \frac{\ae c^2 Q}{b} - \frac{\ae c^2 Q}{2b} - \ae b^2 + \frac{\ae b^2}{2} - \frac{c^2(G+b)}{2} + \frac{(G+b) . bQ}{2}$; e riducendo sarà $(R) = \frac{2c^3}{3} - \frac{2b^3}{3} + \frac{\ae c^2 Q}{2b} - \frac{\ae b^2}{2} - \frac{c^2 G}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{(G+b) . bQ}{2}$.

E passando alla seconda parte dell' antecedente proposizione, sarà $\left(\frac{gdy^2}{ddx} + \frac{g^2dy}{2ds} + z(\frac{dyds}{ddx} + g)\right) . \left((\frac{3gdyds}{ddx} + 2g^2) : (\frac{6dyds}{ddx} + 3g) + \frac{\ae dy}{ds} - \frac{Gdx}{ds}\right)$, che chiamo (S), $= \left(g(b - \right.$

$x) + \frac{g^2(b-x)}{2b} + \frac{c^2}{b}\left(b\sqrt{2} - b + x - \sqrt{(2bx - x^2)}\right)\right).\left(\frac{3bg + 2g^2}{3(2b + g)}\right.$ $+ \frac{a(b-x)}{b} - \frac{G}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}\Big)$; e fatta $x = b$, sarà $(S) =$ $(c^2\sqrt{2} - c^2).\left(\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c + b)} - G\right) = (c^2\sqrt{2} - c^2).\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c + b)}$ $- c^2G\sqrt{2} + c^2G$.

Finalmente per la terza parte risulterà $\int\left(zdx - \frac{gzddy}{ds}\right).\left(\frac{z}{2}\right.$ $\left. + \frac{gdy}{ds} + n - x + a\right)$, che dico (Y), $= \int\frac{c}{b}\left(b\sqrt{2} - b + x - \right.$ $\left.\sqrt{(2bx - x^2)}\right).\left(dx + \frac{gdx}{b}\right).\left(\frac{c}{2b}\left(b\sqrt{2} - b + x - \sqrt{(2bx - }\right.\right.$ $\left.\left. x^2)\right)\left(+ \frac{g}{b}(b - x) + b - x + a\right) = \frac{c^2}{b^2}\int\left(bdx\sqrt{2} - dx(b - x)\right.$ $\left. - dx\sqrt{(2bx - x^2)}\right).\left(\frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{c}{2b}(b - x) - \frac{c}{2b}\sqrt{(2bx - x^2)} + a\right)$ $= \frac{c^2}{b^2}\int\left(bcdx - \frac{cdx}{\sqrt{2}}(b - x) - \frac{cdx}{\sqrt{2}}\sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{cdx}{\sqrt{2}}(b - x)\right.$ $- \frac{cdx}{2b}(b - x)^2 - \frac{cdx}{2b}(b - x).\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{cdx}{\sqrt{2}}\sqrt{(2bx - }$ $x^2) + \frac{cdx}{2b}(b - x).\sqrt{(2bx - x^2)} + \frac{cdx}{2b}(2bx - x^2) + abdx\sqrt{2}$ $\left. - adx(b - x) - adx\sqrt{(2bx - x^2)}\right)$; e riducendo sarà $(Y) =$ $\frac{c^2}{b^2}\int\left(bcdx - cdx\sqrt{2}.\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{cdx}{2b}(b^2 - 4bx + 2x^2) + \right.$ $\left. abdx\sqrt{2} - adx(b - x) - adx\sqrt{(2bx - x^2)}\right)$; e integrando sarà $(Y) = \frac{c^2}{b^2}\left(bcx - c\sqrt{2}.LBF - \frac{cbx}{2} + cx^2 - \frac{cx^3}{3b} + abx\sqrt{2} - \right.$ $\left. abx + \frac{ax^2}{2} - a.LBF\right)$: quindi riducendo di nuovo dopo di aver

aver fatta $x = b$, e lo spazio $LBF = \frac{bQ}{2}$, sarà finalmente

$(T) = \frac{7}{6}c^3 - \frac{c^3}{b\sqrt{2}}Q + ac^2\sqrt{2} - \frac{ac^2}{2} - \frac{ac^2Q}{2b}$.

Unendo pertanto insieme tutte le tre quantità antecedenti e moltiplicandole pel peso P di un piè cubo del materiale, sarà la somma de' momenti $P\big((R) + (S) + (T)\big) = P\Big(\frac{2c^3}{3} - \frac{2b^3}{3} + \frac{ac^2Q}{2b} - \frac{ab^2}{2} - \frac{c^2G}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{(G+b)bQ}{2} + (c^2\sqrt{2} - c^2) . \frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} - c^2G\sqrt{2} + c^2G + \frac{7}{6}c^3 - \frac{c^3}{b\sqrt{2}}Q + ac^2\sqrt{2} - \frac{ac^2}{2} - \frac{ac^2Q}{2b}\Big) = P\Big(\frac{11c^3}{6} - \frac{2b^3}{3} - \frac{ab^2}{2} + \frac{c^2G}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{(G+b)bQ}{2} + (c^2\sqrt{2} - c^2) . \frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} - c^2G\sqrt{2} - \frac{c^3}{b\sqrt{2}}Q + ac^2\sqrt{2} - \frac{ac^2}{2}\Big)$.

Di nuovo il momento della resistenza del muro $IRZN$ è $= \frac{aPG^2}{2} + \frac{G^2R}{2}$; ma sopra esso muro $IRZN$ havvi ancora il muro triangolare WMK che aggiugne resistenza al muro medesimo; dunque bisognerà aggiugnere il momento di questa resistenza, ovvero, condotta dal centro di gravità V del triangolo WMK la verticale VT, il prodotto del peso del triangolo WMK per la distanza RT, onde avere la somma totale de' momenti delle forze che sostengono il muro. Quindi essendo $KM = MW = c\sqrt{2} - c$, sarà il triangolo $WMK = \frac{3c^2}{2} - c^2\sqrt{2}$; ma la MT, ch' è la terza parte di XM, sarà $= \frac{c\sqrt{2}}{3} - \frac{c}{3}$; e però $RT = AR - AM - MT = b + G - c - \frac{c\sqrt{2}}{3} + \frac{c}{3} = b + G - \frac{2c}{3} - \frac{c\sqrt{2}}{3}$; laonde il momento del triangolo WMK

Corol. Prop. 1 di questo

Mm

ridotto in peso diventerà $= P\left(b + G - \frac{2c}{3} - \frac{c\sqrt{2}}{3}\right).\left(\frac{3c^2}{2} - c^2\sqrt{2}\right) = P\left(\frac{3bc^2}{2} + \frac{3c^2G}{2} - \frac{c^3}{3} + \frac{c^3}{6}\sqrt{2} - bc^2\sqrt{2} - c^2G\sqrt{2}\right)$; e per conseguenza la somma totale de' momenti delle resistenze del muro che sostiene la Volta sarà $= P\left(\frac{aG^2}{2} + \frac{3bc^2}{2} + \frac{3c^2G}{2} - \frac{c^3}{3} + \frac{c^3}{6}\sqrt{2} - bc^2\sqrt{2} - c^2G\sqrt{2}\right) + \frac{G^2R}{2}$, la qual quanàtit si dee fare uguale alla somma de' momenti delle forze che cercano di rovesciarlo, il che dà l'equazione del secondo grado

$$P\left(\frac{aG^2}{2} + \frac{3bc^2}{2} + \frac{3c^2G}{2} - \frac{c^3}{3} + \frac{c^3}{6}\sqrt{2} - bc^2\sqrt{2} - c^2G\sqrt{2}\right) + \frac{G^2R}{2}$$

$$= P\left(\frac{11c^3}{6} - \frac{2b^3}{3} - \frac{ab^2}{2} + \frac{c^2G}{2} - \frac{bc^2}{2} + \frac{(G+b)bQ}{2} + (c^2\sqrt{2} - \frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} - c^2G\sqrt{2} - \frac{c^3}{b\sqrt{2}}Q + ac^2\sqrt{2} - \frac{ac^2}{2}\right),$$

che ridotta diventerà $P\left(\frac{aG^2}{2} + 2bc^2 + c^2G - \frac{13c^3}{6} + \frac{c^3}{6}\sqrt{2} - bc^2\sqrt{2}\right) + \frac{G^2R}{2} = P\left(-\frac{2b^3}{3} - \frac{ab^2}{2} + \frac{(G+b)bQ}{2} + (c^2\sqrt{2} - c^2).\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} - \frac{c^3}{b\sqrt{2}}Q + ac^2\sqrt{2} - \frac{ac^2}{2}\right)$, da cui si ricaverà il valore di G, o la ricercata grossezza delle muraglie laterali del magazzino da polvere; il che ecc.

COROLLARIO I.

Sia per esempio la semicorda b della Volta $= 12\frac{1}{2}$ piedi $= \frac{25}{2}$, la sua grossezza $= 3$ piedi onde poter resistere all' urto delle bombe, l'altezza a delle muraglie laterali $= 8$ piedi, che sono appunto le ordinarie dimensioni che si sogliono da-

re a' magazzini da polvere: farà $c = 15\frac{1}{2} = \frac{31}{2}$, $\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} = \frac{87}{56}$, e il quadrante Q del raggio di piedi $12\frac{1}{2}$ farà uguale a $\frac{275}{14}$. Siano poi la Volta e i muri fabbricati di mattoni, sicchè il peso P di un piè cubo diventi $= 130$ lib., e la coerenza R di un piè quadrato sia di lib. 1310; e si sostituiscano tutti questi valori numerici nell' equazione superiore onde avere $\frac{130.8G^2}{2} + \frac{130.25.31^2}{4} + \frac{130.31^2G}{4} - \frac{130.31^3.13}{8.6} + \frac{130.31^3\sqrt{2}}{8.6} - \frac{130.25.31^2\sqrt{2}}{2.4} + \frac{1310G^2}{2} = -\frac{130.2.25^3}{3.8} - \frac{130.8.25^2}{2.4} + \frac{130.25.275G}{2.2.14} + \frac{130.25^2.275}{2.4.14} + \frac{130.87.31^2\sqrt{2}}{4.56} - \frac{130.31^2.87}{4.56} - \frac{130.31^3.2.275}{8.14.25\sqrt{2}} + \frac{130.8.31^2\sqrt{2}}{4} - \frac{130.8.31^2}{2.4}$; e fatte le moltiplicazioni e raddoppiati i termini farà $1040G^2 + 1561625 + 62465G - 2097784 + 228208 - 1104236 + 1310G^2 = -338542 - 162500 + 31919G + 398995 + 137241 - 97044 - 1075841 + 706711 - 249860$; quindi ridotti i termini fra di loro si passerà all' equazione del secondo grado $2350G^2 + 30546G = 731347$; e però farà $G = -\frac{15273}{2350} + \sqrt{\left(\frac{731347}{2350} + \left(\frac{15273}{2350}\right)^2\right)}$, ovvero $G = \frac{28908}{2350} =$ piedi 12 e pollici 4 prossimamente.

Scol. Prop. 1 di questo

COROLLARIO 2.

Ma solendosi guernire le muraglie di questi magazzini con contrafforti messi dalla parte esteriore alti quanto le muraglie medesime, farà bene rintracciare l' equazione che determina la loro grossezza anche in questa supposizione. Sia pertanto *RbaZ* lo spaccato di un contrafforte, in cui *ab* mostra la sua altezza uguale all' altezza *IN* della muraglia, e *Za*

Fig. I. Tav. VII.

quella che diceſi lunghezza del contrafforte. Sia ancora la $Za =$ piedi q, e giacchè queſti contrafforti ſi fanno di pianta rettangolare, ſi chiami la loro groſſezza $=$ piedi m, e la diſtanza dal mezzo di un contrafforte al mezzo dell' altro $=$ piedi n. E' manifeſto che il centro del moto, tanto delle forze che operano contro la muraglia che dell' altre che ad eſſe reſiſtono, il quale prima era in Z, ora paſſa in a. Quindi chiamata non più NZ, ma tutta Na cioè la diſtanza del punto a dalla $IN = G$, reſteranno i momenti delle forze che operano contro il muro eſpreſſi dalle ſteſſe quantità della propoſizione; non così i momenti delle forze reſiſtenti. E perchè $Na = G$, e $Za = q$, ſarà la $NZ = G - q$, e la metà della $NZ = \frac{G-q}{2}$, a cui aggiunta la $Za = q$, s' avrà in $\frac{G-q}{2} + q = \frac{G+q}{2}$ la diſtanza del punto a dalla linea verticale condotta dal centro di gravità del muro $IRZN$; e però il momento della reſiſtenza del peſo di eſſo muro riuſcirà $= Pa(G-q).\frac{G+q}{2} = P(\frac{aG^2}{2} - \frac{aq^2}{2})$: ma il momento della ſua coerenza $= R(G-q).\frac{G+q}{2} = \frac{G^2R}{2} - \frac{q^2R}{2}$. Di nuovo eſſendo la $MT = \frac{c\sqrt{2}}{3} - \frac{c}{3}$, e la $IM = c - b$, ſarà la retta $IT = \frac{c\sqrt{2}}{3} - \frac{c}{3} + c - b = \frac{c\sqrt{2}}{3} + \frac{2c}{3} - b$, la qual linea ſottratta dalla $Na = G$, darà la diſtanza del punto a dalla verticale VT, condotta dal punto V centro di gravità del triangolo WMK, $= G + b - \frac{2c}{3} - \frac{c\sqrt{2}}{3}$; il triangolo poi WMK è $\frac{3c^2}{2} - c^2\sqrt{2}$; laonde il momento del peſo del triangolo WMK ſarà $= P(b + G - \frac{2c}{3} - \frac{c\sqrt{2}}{3}).(\frac{3c^2}{2} - c^2\sqrt{2})$. Si paſſi ora a cercare la reſiſtenza de' contrafforti. E perchè il contrafforte Zb ha la lunghezza $Za = q$, l'altezza $ab = a$, e la ſua groſſezza $= m$, ſarà il momento del ſuo peſo d' intorno al pun-

to $a = P.\alpha mq.\frac{q}{2} = \frac{P\alpha mq^2}{2}$, e il momento della coerenza della sua base $= mq.R.\frac{q}{2} = \frac{mq^2R}{2}$: i contrafforti poi si suppongono collocati alla distanza n dal mezzo di uno al mezzo dell' altro; sarà dunque il di loro momento per la spessezza di un piede $= \frac{P\alpha mq^2}{2n} + \frac{mq^2R}{2n}$: quindi sommate tutte le resistenze de' muri, saranno esse uguali a $P(\frac{\alpha G^2}{2} - \frac{\alpha q^2}{2}) + \frac{G^2R}{2} - \frac{q^2R}{2} + P(b + G - \frac{2c}{3} - \frac{c\sqrt{2}}{3}).(\frac{3c^2}{2} - c^2\sqrt{2}) + \frac{P\alpha mq^2}{2n} + \frac{mq^2R}{2n}$, le quali fatte uguali a' momenti delle forze che cercano rovesciarli daranno dopo le riduzioni l' equazione $P(\frac{\alpha G^2}{2} - \frac{\alpha q^2}{2} + 2bc^2 + c^2G - \frac{13c^3}{6} + \frac{c^3}{6}\sqrt{2} - bc^2\sqrt{2}) + \frac{G^2R}{2} - \frac{q^2R}{2} + \frac{P\alpha mq^2}{2n} + \frac{mq^2R}{2n} = P(-\frac{2b^3}{3} - \frac{\alpha b^2}{2} + \frac{(G+b)bQ}{2} + (c^2\sqrt{2} - c^2).\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} - \frac{c^3}{b\sqrt{2}}Q + \alpha c^2\sqrt{2} - \frac{\alpha c^2}{2})$ che quasi è la stessa equazione ritrovata nella proposizione, se non che qui vi sono quattro termini di più, e G non esprime la grossezza della muraglia, ma la somma di questa grossezza colla lunghezza de' contrafforti.

Sia pertanto come nel corollario antecedente la semicorda b della Volta $=$ piedi $12\frac{1}{2} = \frac{25}{2}$, la grossezza $= 3$, sicchè $c = 12\frac{1}{2} + 3 = 15\frac{1}{2} =$ piedi $\frac{31}{2}$, e il quadrante $Q = \frac{275}{14}$; poi $P = 130$, $R = 1310$, e $\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(c+b)} = \frac{87}{56}$; e sia inoltre la lunghezza q de' contrafforti $= 4$, la grossezza $m = 6$, e la distanza $n = 18$, l' altezza delle muraglie laterali e de' contrafforti cioè $\alpha =$ piedi 8, che sono precisamente tutte le misure che *Vauban*

dava ai Magazzini da polvere da esso fatti fabbricare: veggasi *Belidor* Chap. IX. Liv. IV. *Science des Ingenieurs*. Sarà dunque, sostituendo i numeri, $\frac{130.8G^2}{2} - \frac{130.8.4^2}{2} + \frac{130.25.31^2}{4} + \frac{130.31^2G}{4} - \frac{130.31^3.13}{8.6} + \frac{130.31^3\sqrt{2}}{8.6} - \frac{130.25.31^2\sqrt{2}}{2.4} + \frac{1310G^2}{2} - \frac{4^2.1310}{2} + \frac{130.8.6.4^2}{2.18} + \frac{6.4^2.1310}{2.18} = -\frac{130.2.25^3}{3.8} - \frac{130.8.25^2}{2.4} + \frac{130.25.275G}{2.2.14} + \frac{130.25^2.275}{2.4.14} + \frac{130.31^2.87\sqrt{2}}{4.56} - \frac{130.31^2.87}{4.56} - \frac{130.31^3.2.275}{8.14.25\sqrt{2}} + \frac{130.8.31^2\sqrt{2}}{4} - \frac{130.8.31^2}{2.4}$; e raddoppiando tutto, poi riducendo termine per termine, s' avrà $1040G^2 - 16640 + 1561625 + 62465G - 2097784 + 228208 - 1104236 + 1310G^2 - 20960 + 5546 + 6986 = -338542 - 162500 + 31919G + 398995 + 137241 - 97044 - 1075841 + 706711 - 249860$, e riducendo i termini fra loro si conseguirà $2350G^2 + 30546G = 756415$; per conseguenza sarà $G = -\frac{15273}{2350} + \sqrt{\left(\frac{756415}{2350} + \left(\frac{15273}{2350}\right)^2\right)}$, cioè $G = Na =$ piedi 12 e pollici 7 prossimamente, da cui sottratta la lunghezza $Za = 4$ del contrafforte, resterà la grossezza NZ della muraglia di piedi 8 e pollici 7.

S c o l i o I.

Vauban *da una lunga e ragionata sperienza condotto, era solito dare a' muri laterali dei magazzini guerniti di contrafforti in tutto delle soprammentovate dimensioni, la grossezza di* 8 *a* 9 *piedi secondo la qualità de' materiali (veggasi* Belidor *nel luogo citato) il che perfettamente s' accorda co' risultamenti de' nostri calcoli. Il medesimo* Belidor *col metodo da esso seguito trova pe' muri laterali, la sola grossezza di piedi* 7 *e pollici* 8, *e ciò ancora senza contrafforti, nè so perchè egli ommetta di dire questa essenziale circostanza. Ciò nulla ostante passa dipoi a magnificare non l' esattezza del suo metodo, di cui non sapeva muover dubbio, ma piuttosto l' abilità di* Vauban *che colla scorta della sola pratica aveva trovato la vera*

grossezza da darsi a' muri de' magazzini, cioè quella stessa che insegnava la sua teoria. Ma non veggo come piedi 7 e oncie 8 di muraglia senza contrafforti equivalgano a piedi 8 o 9 di muraglia oltre i contrafforti. Nel primo corollario noi abbiamo dimostrato che la muraglia senza contrafforti capace di resistere allo sforzo della Volta doveva essere di piedi 12 e pollici 4, non di 7 e pollici 8 come Belidor. *All' incontro apparisce manifestamente la somma e quasi incredibile convenienza della pratica colle nostre teorie.*

COROLLARIO 3.

Sia per secondo esempio la semicorda $b = 15$, $c = 18$, $a = 13\frac{1}{2} = \frac{27}{2}$, $P = 130$, $R = 1310$, e però il quadrante $Q = \frac{165}{7}$, e $\frac{2c^2 - bc - b^2}{3(b+c)} = \frac{17}{11}$; e si ricerchi la grossezza da darsi alle muraglie senza contrafforti: sarà dunque sostituendo i valori numerici nell' equazione di questa proposizione

$$\frac{130.27G^2}{2.2} + 130.30.18^2 + 130.18^2G - \frac{130.18^2.13}{6} + \frac{130.18^3\sqrt{2}}{6} - 130.15.18^2\sqrt{2} + \frac{1310G^2}{2} = -\frac{130.2.15^3}{3} - \frac{130.27.15^2}{2.2} + \frac{130.15.165G}{2.7} + \frac{130.15^2.165}{2.7} + \frac{130.17.18^2\sqrt{2}}{11} - \frac{130.18^2.17}{11} - \frac{130.18^2.165}{7.15\sqrt{2}} + \frac{130.27.18^2\sqrt{2}}{2} - \frac{130.27.18^2}{2.2}$$

; ovvero fatte le moltiplicazioni e raddoppiati i termini sarà $1755G^2 + 2527200 + 84240G - 3285360 + 357400 - 1787000 + 1310G^2 = -585000 - 394875 + 45964G + 689464 + 184115 - 130189 - 1684885 + 1608301 - 568620$, cioè $3065G^2 + 38276G = 1306071$; e però la grossezza del muro $G = -\frac{19138}{3065} + \sqrt{\left(\frac{1306071}{3065} + \left(\frac{19138}{3065}\right)^2\right)} = \frac{46963}{3065} =$ piedi 15 e pollici 3 prossimamente.

Ma si ricerchi la grossezza della muraglia supponendola guernita di contrafforti lunghi piedi 4, grossi piedi 6, e alla distanza da mezzo a mezzo di piedi 18, sicchè $q = 4$, $m = 6$, $n = 18$. Sarà pertanto, sostituendo nella formola del corollario antecedente i valori numerici,

$$\frac{130.27G^2}{2.2} - \frac{130.27.4^2}{2.2} + 130.30.18^2 + 130.18^2G - \frac{130.18^3.13}{6} + \frac{130.18^3\sqrt{2}}{6} - 130.15.18^2\sqrt{2} + \frac{1310G^2}{2} - \frac{4^2.1310}{2} + \frac{130.27.6.4^2}{2.2.18} + \frac{6.4^2.1310}{2.18}$$
$$= -\frac{130.2.15^3}{3} - \frac{130.27.15^2}{2.2} + \frac{130.15.165G}{2.7} + \frac{130.15^2.165}{2.7} + \frac{130.17.18^2\sqrt{2}}{11} - \frac{130.18^2.17}{11} - \frac{130.18^3.165}{7.15\sqrt{2}} + \frac{130.27.18^2\sqrt{2}}{2} - \frac{130.27.18^2}{2.2},$$

dove l' incognita G indica la somma della grossezza della muraglia colla lunghezza del contrafforte; laonde radoppiando tutto e facendo le moltiplicazioni s' avrà $1755G^2 - 28080 + 2527200 + 84240G - 3285360 + 357400 - 1787000 + 1310G^2 - 20960 + 9360 + 6986 = - 585000 - 394875 + 45964G + 689464 + 184115 - 130189 - 1684885 + 1608301 - 568620$, cioè $3065G^2 + 38276G = 1338765$; per conseguenza $G = -\frac{19138}{3065} + \sqrt{\left(\frac{1338765}{3065} + \left(\frac{19138}{3065}\right)^2\right)} = \frac{47717}{3069} =$ piedi 15 e pollici 7, da cui tolta la lunghezza di 4 piedi del contrafforte, resteranno piedi 11 e pollici 7 per la grossezza della muraglia della Volta.

S c o l i o 2.

Riferisce Frezier *nel suo Trattato di Stereotomia Tom. 3 pag. 348, ch' essendo stato eretto in Francia un magazzino delle misure sopra esposte, ch' eccedono alquanto le comuni, a' di cui muri laterali non s' era però data che la sola grossezza di 9 piedi, benchè co' soliti contrafforti, non poterono essi muri resistere allo sfor-*

zo della Volta, e rovinò tutto l' edifizio. Se pertanto si fosse loro assegnata la grossezza di piedi 11 *e pollici* 7 *oltre i contrafforti, come ci ha somministrato il nostro calcolo, è probabile che non sarebbe accaduta tale rovina. Il metodo del de la* Hire *dà, come dice* Frezier *nel luogo citato, piedi* 11 *circa per la grossezza de' muri, ma senza contrafforti. Quanto dunque si allontani dal vero quel metodo, che pure è il comunemente adottato, e dalle cose qui dette e dall' altre dello scolio antecedente manifestamente apparisce; e ciò tanto più quanto posso assicurare (ed ognuno può da se stesso riscontrare il vero) che quella grossezza, che* Frezier *facendo uso di una lunga costruzione geometrica dice di aver trovata di piedi* 11, *io la ho sempre esattamente calcolandola conseguita ben di un piede inferiore di questa misura.*

S c o l i o 3.

Si è trattato fin qui delle Volte a mezza botte di uniforme grossezza in tutta la loro estensione: in maniera simile si possono calcolare gli effetti di esse Volte anche se la grossezza sia variabile e termini a una curva di qualsivoglia natura. Passiamo ora ad un' altra specie di Volte.

PROBLEMA 13. PROPOSIZIONE 13.

Determinare la solidità di un cuneo in una cupola compresa tra le superficie di due mezze sfere concentriche.

Siano *AMI ONI* due quadranti, che abbiano il loro centro in *I*, e l'asse *AI* verticale, e dal rivolgimento dello spazio *AMNO* d' intorno all' asse *AI* sia generato il solido della cupola. Sia poi *EDFG* la superficie anteriore di un cuneo, e intanto che lo spazio *AMNO* si rivolge per l' arco *NL* del cerchio orizzontale della base onde formare uno spicchio della cupola, sia descritto dalla superficie *EDFG* il cuneo *FB*: bisogna ritrovare la solidità del cuneo *FB*. Fig. VIII. Tav. VI.

E' manifesto, che il cuneo *FB* è compreso da sei superficie, due delle quali solamente, cioè la *EDFG* e la sua op-

posta *BCKH* sono piane; le *BCDE HKFG* sono convesse, e contenute fra gli archi *BE CD HG KF*, i due primi de' quali, cioè li *BE CD*, hanno lo stesso polo in *A*, e gli altri *HG KF* lo stesso polo in *O*; e per fine la superficie *BEGH* e la sua opposta *CDFK* sono una concava, l'altra convessa, e formano parte delle superficie de' coni tronchi generati dalle rette *EG DF* nell'atto della rivoluzione.

Si dica ora il raggio esteriore *IA* della cupola $= c$, l' interiore $IO = b$, l' angolo $OIF = \pi$, l' angolo $OIG = \mu$; e la proporzione del diametro di un cerchio alla sua circonferenza, ovvero quella del quadrato del raggio all' area del cerchio, le quali proporzioni sono le medesime, sia come $m:n$, e il numero de' cunei per ogni andare orizzontale della Volta sia $= p$.

E poichè nel triangolo isoscele *IAD* sta come il seno tutto r al seno della metà dell' angolo *AID*, così la *AI* alla metà della *AD*, cioè $r : \text{sen.} \frac{\pi}{2} :: c : \frac{AD}{2}$, sarà $AD = \frac{2c}{r} . \text{sen.} \frac{\pi}{2}$; e però il cerchio descritto dal raggio *AD*, ovvero la superficie del segamento di sfera descritta dall' arco *AD* nella rivoluzione, sarà $= \frac{4c^2 n}{mr^2} \left(\text{sen.} \frac{\pi}{2}\right)^2$; quindi dividendo questa superficie pel numero p di cunei che vi sono in ogni andare orizzontale, si ritroverà la superficie sferica $ACD = \frac{4c^2 n}{mpr^2} \left(\text{sen.} \frac{\pi}{2}\right)^2$. Similmente si troverà la superficie sferica $ABE = \frac{4c^2 n}{mpr^2} \left(\text{sen.} \frac{\mu}{2}\right)^2$; laonde la rimanente $BCDE = \frac{4c^2 n}{mpr^2} \left(\left(\text{sen.} \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\text{sen.} \frac{\mu}{2}\right)^2\right)$: per conseguenza moltiplicando essa superficie per la terza parte del raggio *ID*, s' avrà la solidità della piramide, che ha per base essa *BCDE* e per vertice il punto $I = \frac{4c^3 n}{3mpr^2} \left(\left(\text{sen.} \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\text{sen.} \frac{\mu}{2}\right)^2\right)$. Nello stesso modo operando si conseguirà la solidità della piramide che ha per base la superficie *HKFG* e per vertice il

punto $I = \frac{4b^3n}{3mpr^2}\left(\left(\text{sen.}\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\text{sen.}\frac{\mu}{2}\right)^2\right)$; e però la solidità del cuneo FB, ch' è uguale alla differenza di esse piramidi, riuscirà $= \frac{4n(c^3 - b^3)}{3mpr^2}\cdot\left(\left(\text{sen.}\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\text{sen.}\frac{\mu}{2}\right)^2\right)$. Essendo poi $\left(\text{sen.}\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\text{sen.}\frac{\mu}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{r}{2}.\cos.\pi - \frac{r^2}{2} + \frac{r}{2}.\cos.\mu = \frac{r}{2}.\cos.\mu - \frac{r}{2}.\cos.\pi = \text{sen.}\frac{\pi+\mu}{2}.\text{sen.}\frac{\pi-\mu}{2}$, sarà finalmente la solidità del cuneo $FB = \frac{4n(c^3 - b^3)}{3mpr^2}.\text{sen.}\frac{\pi+\mu}{2}.\text{sen.}\frac{\pi-\mu}{2}$, cioè uguale al prodotto della quantità $\frac{4n(c^3 - b^3)}{3mpr^2}$ nel seno della metà della somma degli angoli OIF OIG, e nel seno della metà della loro differenza; il che ecc. Equaz. IX. Equaz. VIII. Prop. 7 Lib. I.

Corollario I.

E perchè la solidità del cuneo FB s' è determinata $= \frac{4n(c^3 - b^3)}{3mpr^2}\cdot\left(\left(\text{sen.}\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\text{sen.}\frac{\mu}{2}\right)^2\right)$, e quella della piramide interiore $= \frac{4b^3n}{3mpr^2}\cdot\left(\left(\text{sen.}\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\text{sen.}\frac{\mu}{2}\right)^2\right)$; sarà la solidità del cuneo a quella piramide interiore, ovvero ancora le loro rispettive gravità, come $c^3 - b^3 : b^3$.

Corollario 2.

Per la qual cosa fatta la $OP = x$, la $PG = y$, e il cuneo FB infinitesimo di grandezza, sicchè $PQ = GR = dx$, $FR = dy$, $FG = ds$, poi diviso per mezzo l' angolo FIG dalla retta IS, e ordinata la ST, sarà la $GS = \frac{ds}{2}$, e la $ST = y + \frac{dy}{2}$; ma l' angolo SIG sarà $= \frac{\pi - \mu}{2}$, e l' angolo $OIS = \frac{\pi + \mu}{2}$. E

perchè sta il seno tutto al seno dell' angolo OIS, come la SI alla ST, ovvero $r : \text{sen.} \frac{\pi + \mu}{2} :: b : y + \frac{dy}{2}$, s'avrà sen. $\frac{\pi + \mu}{2} = \frac{r}{b}\left(y + \frac{dy}{2}\right)$: e similmente la proporzionalità del seno tutto al seno dell' angolo SIG, come IS alla GS, darà sen. $\frac{\pi - \mu}{2} = \frac{rds}{2b}$: quindi sostituendo, sarà la solidità del cuneo $FB = \frac{4n(c^3 - b^3)}{3mpr^2} \cdot \frac{r^2 ds}{2b^2} \cdot \left(y + \frac{dy}{2}\right)$, vale a dire, non trascurando gl'infinitesimi del secondo ordine, si conseguirà $FB = \frac{4n(c^3 - b^3)}{6b^2 mp} \cdot \left(yds + \frac{dyds}{2}\right)$. Anzi perchè si ha per proprietà del quadrante ON la quantità $yds = \sqrt{(2bx - x^2)} \cdot \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} = bdx$, $\frac{dyds}{ddx} = b$, e $dyds = bddx$, sarà la solidità del cuneo infinitesimo $FB = \frac{2n(c^3 - b^3)}{3bmp} \cdot \left(dx + \frac{ddx}{2}\right)$.

COROLLARIO 3.

Ma se XC sia il cuneo inferiormente contiguo allo FB, e l' arco FX uguale all' arco GF, condotta dal punto V della metà dell'arco FX l'ordinata VZ, sarà essa uguale a $y + \frac{3dy}{2}$, e l' arco FV sarà $= \frac{ds}{2}$; quindi operando come prima si troverà la solidità del cuneo $XC = \frac{4n(c^3 - b^3)}{3mpr^2} \cdot \frac{r^2 ds}{2b^2} \cdot \left(y + \frac{3dy}{2}\right) = \frac{2n(c^3 - b^3)}{3bmp} \cdot \left(dx + \frac{3ddx}{2}\right)$.

COROLLARIO 4.

E supposto $=u$ l' arco interiore NL della base orizzontale NV di uno spicchio della cupola, poichè la circonferenza del raggio IN è $=\frac{2bn}{m}$, e il numero de' cunei per ogni andare orizzontale $=p$, sarà $u=\frac{2bn}{pm}$, e però $p=\frac{2bn}{mu}$; laonde, sostituendo, sarà la solidità del cuneo $FB=\frac{u(c^3-b^3)}{3b^2}.(dx+\frac{ddx}{2})$; e quella del contiguo inferiore $XC=\frac{u(c^3-b^3)}{3b^2}.(dx+\frac{3ddx}{2})$.

PROBLEMA 14. PROPOSIZIONE 14.

Trovare il centro di gravità di un cuneo infinitesimo di una cupola.

Sia ADC un piano che divida in parti uguali e simili il cuneo infinitesimo di una cupola, e sia $AEFC$ il profilo del cuneo: il raggio esteriore DA della cupola si dica $=c$, e l' interiore $DE=b$. Si prenda poi nell' asse DB il punto G centro di gravità della piramide che ha per base la superficie esteriore del cuneo e per vertice il punto D, il quale cadrà alla distanza DG dal punto D uguale a $\frac{3c}{4}$ per le cose che si dimostrano nella Statica; e similmente il centro di gravità H della piramide, che ha per base la superficie interiore del cuneo e per vertice il punto medesimo D, lascierà la distanza $DH=\frac{3b}{4}$; dunque la retta rimanente HG sarà $=\frac{3c}{4}-\frac{3b}{4}$. Quindi facendo come la solidità del cuneo alla piramide interiore, ovvero $c^3-b^3:b^3$, così la HG alla GI, si tro- Corol. 1 Prop. ant.

Fig. IV. Tav. I.

verà la $GI = \frac{3b^3(c-b)}{4(c^3-b^3)} = \frac{3b^3}{4(c^2+bc+b^2)}$, e il punto I farà centro di gravità del cuneo; e però, aggiunta alla GI la DG, si avrà $\frac{3b^3}{4(c^2+bc+b^2)} + \frac{3c}{4}$ per la distanza tra il centro D della cupola e il punto I centro di gravità del cuneo; il che ecc.

PROBLEMA 15. PROPOSIZIONE 15.

Ritrovare in una cupola, compresa fra le superficie di due emisferi concentrici, la differenza delle pressioni che esercitano fra di loro due cunei infinitesimi contigui, senza tener conto degli altri cunei, e trovare in oltre il momento di essa differenza.

Fig. III. Tav. V. Sia AZm il profilo di una cupola, il quale passi pel centro di gravità de' cunei componenti uno spicchio, e sia AR il profilo del muro del tamburo, e R il centro del moto. Indichino poi i due spazj infinitesimi $bZeL$ $ZaTe$ due cunei contigui sopra basi uguali Le eT, e i punti D C i loro rispettivi centri di gravità. Se dunque da' punti D C si tirino le verticali DF CE rappresentanti le solidità e gravità de' cunei suddetti, e si compiano i parallelogrammi $DHFG$ $CKEI$ sopra linee perpendicolari alle commessure de' cunei, dinoterà DH la pressione del cuneo $bZeL$ sull' inferiore $ZaTe$, e CI quella di $ZaTe$ contro $bZeL$: bisogna primieramente trovare la differenza delle DH CI.

Si faccia la $mO = x$, la $OL = y$, la $Lg = dx$, la $ge = dy$, la $Le = eT = ds$, la $eu = dx + ddx$, la $Tu = dy + ddy$; poi il raggio esteriore della cupola $= c$, l' interiore $= b$: indi si chiami l' altezza YR del tamburo $= a$, la sua grossezza $AY = G$, l' arco interiore del cerchio orizzontale della base di uno spicchio $= u$. Sarà, per le cose dimostrate nel corollario 4 dell' antecedente, la solidità o la gravità del

cuneo $bZeL = \frac{u(c^3 - b^3)}{3b^2} \cdot \left(dx + \frac{ddx}{2}\right) = DF$; e la ſolidità o la gravità del cuneo $ZaTe = \frac{u(c^3 - b^3)}{3b^2} \cdot \left(dx + \frac{3ddx}{2}\right) = CE$; laonde fatta per facilità di calcolo $e = \frac{u(c^3 - b^3)}{3b^2}$, diventerà $DF = edx + \frac{eddx}{2}$, e $CE = edx + \frac{3eddx}{2}$.

Se ATm foſſe una curva qualunque, non in iſpezialità un quadrante, e mp foſſe il ſuo aſſe, condotti i raggi oſculatori LQ *en* Tn, e chiamato il raggio $LQ = \frac{dyds}{ddx} = z$, ſi proverebbe nello ſteſſo modo della propoſizione 1 del Libro V., che sen. $HDG = \frac{rds}{z}$, sen. $KCI = \frac{rds}{z + dz}$, sen. $FDG = \frac{rdy}{ds} + \frac{rdx}{2z}$, e per fine sen. $KCE = \frac{rdy}{ds} + \frac{rddy}{ds} - \frac{rdx + rddx}{2z + 2dz}$. E poichè ſta come $DF : DH ::$ sen. HDG : sen. FDG, ovvero $edx + \frac{eddx}{2} : DH :: \frac{rds}{z} : \frac{rdy}{ds} + \frac{rdx}{2z}$, ſarà $DH = \left(edx + \frac{eddx}{2}\right) \cdot \left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dx}{2ds}\right)$.

Di nuovo la proporzionalità di $CE : CI ::$ sen. KCI : sen. KCE, ovvero di $edx + \frac{3eddx}{2} : CI :: \frac{rds}{z + dz} : \frac{rdy}{ds} + \frac{rddy}{ds} - \frac{rdx + rddx}{2z + 2dz}$, darà $CI = \left(edx + \frac{3eddx}{2}\right) \cdot \left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dydz}{ds^2} + \frac{zddy}{ds^2} + \frac{dzddy}{ds^2} - \frac{dx}{2ds} - \frac{ddx}{2ds}\right)$, cioè ommettendo nel ſecondo moltiplicatore i termini traſcurabili, ſarà $CI = \left(edx + \frac{3eddx}{2}\right) \cdot \left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dydz}{ds^2} + \frac{zddy}{ds^2} - \frac{dx}{2ds}\right)$: laonde la differenza tra le DH CI ſarà $= \left(edx + \frac{eddx}{2}\right) \cdot \left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dx}{2ds}\right) - \left(edx + \frac{3eddx}{2}\right) \cdot \left(\frac{zdy}{ds^2} + \frac{dydz}{ds^2} + \frac{zddy}{ds^2} - \right.$

$\frac{dx}{2ds}) = \frac{edx^2}{ds} - \frac{edxdydz}{ds^2} - \frac{ezdxddy}{ds^2} - \frac{ezdyddx}{ds^2}$ negligendo i termini infinitesimi di secondo ordine. Nella cupola poi $z = \frac{dyds}{ddx} = b$, e $dz = 0$, dunque $DH - CI = \frac{edx^2}{ds} - \frac{edxdyddy}{dsddx} - \frac{edy^2}{ds} = \frac{edx^2}{ds} + \frac{edx^2}{ds} - \frac{edy^2}{ds} = \frac{2edx^2}{ds} - \frac{edy^2}{ds}$. Oltre a ciò perchè $y = \sqrt{(2bx - x^2)}$, $dy = \frac{(b-x)dx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $ds = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, $\frac{dx^2}{ds} = \frac{dx}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}$, e $\frac{dy^2}{ds} = \frac{(b-x)^2 dx}{b\sqrt{(2bx - x^2)}} = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{dx}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}$, sarà finalmente $DH - CI = \frac{2edx}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} + \frac{edx}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} = \frac{3edx}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$.

In secondo luogo poichè la distanza QD dal centro della
Prop. ant. cupola al centro di gravità del cuneo $bZeL$ è $= \frac{3b^3}{4(c^2 + bc + b^2)} + \frac{3c}{4}$, fatta questa distanza per abbreviare il calcolo $= k$, si avrà, operando nel resto come nella prop. 3 del Libro V., la perpendicolare RV tirata dal punto R sulla direzione DH prolungata $= k + \frac{edy}{ds} - \frac{dx}{ds}(G + b) = k + \frac{e(b-x)}{b} - \frac{G+b}{b} \cdot \sqrt{(2bx - x^2)}$; per conseguenza il momento della differenza delle pressioni di due cunei infinitesimi contigui riuscirà $= \left(\frac{3edx}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}\right) \cdot \left(k + \frac{e(b-x)}{b} - \frac{G+b}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}\right)$; il che ecc.

Corollario

COROLLARIO I.

Essendosi provato che la differenza tra le pressioni di due cunei infinitesimi contigui è $= \frac{3cdx}{b} \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{bcdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, nel caso che $y = \sqrt{(2bx - x^2)} = \frac{b}{\sqrt{3}}$, cioè y uguale alla terza parte del lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio del raggio b, e però $x = b - b\sqrt{\frac{2}{3}}$, riuscirà allora $DH - CI = \frac{3cdx}{b} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} - \frac{bcdx\sqrt{3}}{b} = cdx(\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 0$; quindi ricaveremo questa elegante proprietà della cupola, che quando l' ascissa OQ Fig. VIII. Tav. VI.
sia $= b - b\sqrt{\frac{2}{3}}$, e l' ordinata $QF = \frac{b}{\sqrt{3}}$, i cunei infinitesimi contigui al punto F si premono ugualmente a vicenda, non computando però l' effetto degli altri cunei dello spicchio. Se poi sia y, o $\sqrt{(2bx - x^2)} < \frac{b}{\sqrt{3}}$, vale a dire l' ascissa x minore della OQ, sarà anche, quadrando, poi dividendo tutto per $\sqrt{(2bx - x^2)}$, pure $\frac{3cdx}{b} \sqrt{(2bx - x^2)} < \frac{bcdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$; laonde $\frac{3cdx}{b} \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{bcdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$, cioè la differenza delle pressioni è una quantità negativa, e la pressione del cuneo inferiore è più grande di quella del superiore; e però nella parte OF dello spicchio i cunei inferiori premono più i superiori di quello siano da essi premuti, e la differenza positiva delle loro pressioni è $= \frac{bcdx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{3cdx}{b} \sqrt{(2bx - x^2)}$. Allo stesso modo si dimostrerà che se sia $y > \frac{b}{\sqrt{3}}$, e l' ascissa x maggiore della OQ, la differenza delle pressioni resterà una quantità positiva, e però nella parte FN dello spicchio i cu-

nei superiori premono più gl' inferiori di quello sieno da essi premuti.

COROLLARIO 2.

Poichè il punto F, in cui i cunei contigui si premono ugualmente a vicenda, corrisponde all'ordinata $QF = \frac{b}{\sqrt{3}}$, e all' ascissa $OQ = b - b\sqrt{\frac{2}{3}}$, sarà, levando l' asimetria, la $QF = \frac{5773}{10000} b$ per approssimazione, e la $OQ = \frac{1835}{10000} b$, onde la rimanente QI fino al centro $= \frac{8165}{10000} b$; e però la risoluzione del triangolo rettangolo FQI somministrerà l'angolo OIF di 35°, 15', 52", poi l'arco $OF = \frac{6155}{10000} b$; dunque se fermo l' asse OI si giri la retta IF ad esso inclinata per 35°, 15', 52", finchè ritorni dove cominciò a girarsi, descriverà il punto F una circonferenza orizzontale, che mostrerà in ogni spicchio il sito dove i cunei contigui si premono ugualmente a vicenda: i superiori a quel cerchio avranno poi una tendenza di pressioni verso la sommità della cupola, e gl' inferiori verso l' impostatura.

SCOLIO.

Questa nuova proprietà delle cupole era troppo interessante, perchè io non ne cercassi una conferma nel calcolo finito, alla qual cosa mi faceva strada la proposizione 13, *dove si è mostrato il modo di trovare la solidità di un cuneo quantunque finito di grandezza. Sieno pertanto* XC FB *due cunei contigui finiti di uno spicchio della cupola, e si faccia l' angolo* OIG $= \mu$, *l' angolo* OIF $= \pi$; *e tutto il resto come nella citata proposizione: sarà dunque la solidità del cuneo* FB, *o la sua gravità*, $= \frac{4n(c^3 - b^3)}{3mpr^2}$.

$\text{sen.}\,\frac{\pi+\mu}{2}\,.\,\text{sen.}\,\frac{\pi-\mu}{2}$, *cioè fatta* $\frac{4n(c^3-b^3)}{3mpr^2} = e$, *saranno esse* $= e\,.\,\text{sen.}\,\frac{\pi+\mu}{2}\,.\,\text{sen.}\,\frac{\pi-\mu}{2}$. *Perchè poi l'angolo* OIG $= \mu$, *e l'angolo* OIF $= \pi$, *sarà l'angolo rimanente* GIF $= \pi - \mu =$ FIX, *che aggiunto all' angolo* OIF, *darà tutto l' angolo* OIX $= 2\pi - \mu$, *e però dati gli angoli* OIF OIX *si troverà, come prima, la solidità o la gravità del cuneo* XC $= e\,.\,\text{sen.}\,\frac{3\pi-\mu}{2}\,.\,\text{sen.}\,\frac{\pi-\mu}{2}$. *Di nuovo si prenda il centro di gravità del cuneo* FB, *che cadrà in qualche punto della* IS *prolungata, e da esso centro si conduca una linea verticale rappresentante la gravità del cuneo* FB, *e si compia per fine nel solito modo un parallelogrammo sopra direzioni perpendicolari alle commessure* EG DF; *si proverà che sta la gravità del cuneo alla pressione sul cuneo inferiore* XC, *come il seno dell' angolo* FIG *al seno dell' angolo* GIN *o al coseno di* GIO; *dunque* $\frac{e\,.\,\cos.\,\mu}{\text{sen.}(\pi-\mu)}\,.\,\text{sen.}\,\frac{\pi+\mu}{2}\,.\,\text{sen.}\,\frac{\pi-\mu}{2}$ *dinota la pressione del cuneo* FB *sull' inferiore* XC. *Similmente operando si troverà che come la gravità del cuneo* XC *alla sua pressione sul superiore* FB, *così sta il seno dell' angolo* FIX *al seno dell' angolo* XIN, *o al coseno di* OIX, *e che per conseguenza* $\frac{e\,.\,\cos.(2\pi-\mu)}{\text{sen.}\,(\pi-\mu)}\,.\,\text{sen.}\,\frac{3\pi-\mu}{2}\,.\,\text{sen.}\,\frac{\pi-\mu}{2}$ *esprime la pressione di* XC *contro* FB. *Affinchè dunque possano questi due cunei premersi a vicenda ugualmente, levati i moltiplicatori e divisori comuni, sarà d' uopo che sia* $\cos.\,\mu\,.\,\text{sen.}\,\frac{\pi+\mu}{2} = \cos.\,(2\pi-\mu)\,.\,\text{sen.}\,\frac{3\pi-\mu}{2}$.

In oltre essendo $\pi > \mu$, *e però* $\frac{\pi+\mu}{2} > \mu$, *e* $2\pi - \mu > \frac{3\pi-\mu}{2}$, *sarà* $\cos.\,\mu\,.\,\text{sen.}\,\frac{\pi+\mu}{2} = \frac{r}{2}\,.\,\text{sen.}\,\frac{\pi+3\mu}{2} + \frac{r}{2}\,.\,\text{sen.}\,\frac{\pi-\mu}{2}$, *e* Equaz. V. Prop. 7 Lib. I.

Equaz. VI. $\cos.(2\pi-\mu).\,\mathrm{sen}.\frac{3\pi-\mu}{2}=\frac{r}{2}.\,\mathrm{sen}.\frac{7\pi-3\mu}{2}-\frac{r}{2}.\,\mathrm{sen}.\frac{\pi-\mu}{2}$;

laonde sostituendo queste quantità nella superior equazione avremo

Equaz. VI. $r.\,\mathrm{sen}.\frac{\pi-\mu}{2}=\frac{r}{2}.\,\mathrm{sen}.\frac{7\pi-3\mu}{2}-\frac{r}{2}.\,\mathrm{sen}.\frac{\pi+3\mu}{2}=\cos.2\pi.$

Equaz. IX. $\mathrm{sen}.\frac{3\pi-3\mu}{2}$: *ma* $\cos.2\pi=r-\frac{2}{r}.(\mathrm{sen}.\pi)^2$, *e* $\mathrm{sen}.\frac{3\pi-3\mu}{2}$

Equaz. I. $=\frac{1}{r}.\,\mathrm{sen}.(\pi-\mu).\cos.\frac{\pi-\mu}{2}+\frac{1}{r}.\cos.(\pi-\mu).\,\mathrm{sen}.\frac{\pi-\mu}{2}$

Equaz. I. X. $=\frac{2}{r^2}.\,\mathrm{sen}.\frac{\pi-\mu}{2}.\left(\cos.\frac{\pi-\mu}{2}\right)^2+\frac{2}{r^2}.\left(\cos.\frac{\pi-\mu}{2}\right)^2.\,\mathrm{sen}.\frac{\pi-\mu}{2}$

$-\mathrm{sen}.\frac{\pi-\mu}{2}$; *dunque* $r.\,\mathrm{sen}.\frac{\pi-\mu}{2}=\left(r-\frac{2}{r}.(\mathrm{sen}.\pi)^2\right).$

$\left(\frac{2}{r^2}.\,\mathrm{sen}.\frac{\pi-\mu}{2}.\left(\cos.\frac{\pi-\mu}{2}\right)^2+\frac{2}{r^2}.\left(\cos.\frac{\pi-\mu}{2}\right)^2.\,\mathrm{sen}.\frac{\pi-\mu}{2}\right.$

$\left.-\mathrm{sen}.\frac{\pi-\mu}{2}\right)$, *ovvero dividendo tutto per* $\mathrm{sen}.\frac{\pi-\mu}{2}$ *e riducendo*,

s' avrà $r^4=\left(r^2-2.(\mathrm{sen}.\pi)^2\right).\left(4.\left(\cos.\frac{\pi-\mu}{2}\right)^2-r^2\right)$; *e però*

$$\frac{r^4}{4.\left(\cos.\frac{\pi-\mu}{2}\right)^2-r^2}=r^2-2.(\mathrm{sen}.\pi)^2$$; *quando dunque*

accada esser tali gli angoli π μ *che si verifichi la detta equazione, i due cunei si premeranno ugualmente a vicenda; ma se il primo membro sia minore del secondo, invertendo, si proverà che anche* $\cos.\mu.\,\mathrm{sen}.\frac{\pi+\mu}{2}<\cos.(2\pi-\mu).\,\mathrm{sen}.\frac{3\pi-\mu}{2}$, *e che il cuneo superiore preme meno l' inferiore di quello sia da esso premuto; e viceversa sarà, quando il primo membro sia maggiore del secondo.*

Siano per esempio infinitesimi i cunei di uno spicchio della cupola, nel qual caso è infinitesima la differenza tra gli angoli π μ, *e però* $\cos.\frac{\pi-\mu}{2}=r$; *sarà dunque* $\frac{r^4}{4r^2-r^2}=r^2-2.(\mathrm{sen}.\pi)^2$,

cioè $\frac{r}{\sqrt{3}} = \text{sen.}\,\pi = \text{sen.}\,FIQ$, *e risolvendo il triangolo* FIQ, *che ha l' ipotenusa* $FI = b$, *si troverà la* $FQ = \frac{b}{\sqrt{3}}$; *per conseguenza se l' angolo* FIQ *abbia il suo seno* $= \frac{r}{\sqrt{3}}$, *o se l' ordinata* FQ *sia* $= \frac{b}{\sqrt{3}}$, *al punto* F *corrisponderanno due cunei, i quali si premeranno ugualmente. Ma sopra il punto* F *restando costante l' angolo infinitesimo* $\frac{\pi - \mu}{2}$ *al centro de' cunei, e l' angolo* π *facendosi minore, sarà* $\frac{r^4}{4(\cos.\frac{\pi-\mu}{2})^2 - r^2} < r^2 - 2.(\text{sen.}\,\pi)^2$; *dunque tutti i cunei superiori premeranno meno gl' inferiori di quello sieno da essi premuti; e all' incontro accaderà ne' cunei sotto il punto* F; *tutte verità già dimostrate superiormente col calcolo degl' infinitesimi.*

PROBLEMA 16. PROPOSIZIONE 16.

In uno spicchio di una cupola compresa tra le superficie di due emisferi concentrici trovare la somma de' momenti delle forze che operano per rovesciare la muraglia del tamburo.

Sia *AVMNLO* uno spicchio di una cupola, e sia *F* il punto che corrisponde all' ascissa $OQ = b - b\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1835}{10000}b$, all' ordinata $QF = \frac{5773}{10000}b$, e all' arco $OF = \frac{6155}{10000}b$; sicchè *F* sia il punto dove i cunei infinitesimi contigui dello spicchio si premono ugualmente. Si faccia poi $\frac{1835}{10000}b = q = OQ$, $\frac{5773}{10000}b = h$ Fig. VIII. Tav. VI.

$= QF$, $\frac{6155}{10000}b = l = OF$; e le altre cose date si nominino come nell' antecedente, cioè il raggio interiore $= b$, l' esteriore $= c$, l' arco NL della base dello spicchio $= u$, l' altezza NW del tamburo $= a$, la sua grossezza $W\text{Æ} = G$, la distanza dal centro della cupola al centro di gravità di un cuneo $= \frac{3b^3}{4(c^2 + bc + b^2)} + \frac{3c}{4} = k$, e per fine $e = \frac{u(c^3 - b^3)}{3b^2}$.

Per le cose colà dette nel corollario 1, dal punto F fino all' impostatura N ogni cuneo superiore preme per se stesso l' inferiore contiguo più di quello sia da esso premuto, e la differenza delle pressioni è $= \frac{3edx}{b}\sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}}$; tutto all' opposto succede ne' cunei posti tra F e la sommità O, e la differenza delle pressioni è $= \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} - \frac{3edx}{b}\sqrt{(2bx - x^2)}$. Per la qual cosa se col metodo della proposizione 4 del Libro V. si prenda nella figura da F in N dal centro di gravità di ciascun cuneo inferiore all' ingiù una linea retta uguale alla differenza di esse pressioni, e in direzione perpendicolare alla comune commessura dell' inferiore col superiore; poi da F in O si prenda dal centro di gravità di ogni cuneo superiore all' insù una retta uguale alla differenza delle pressioni, e perpendicolare alla comune commessura de' due cunei, indi si compongano, si risolvano queste rette, e si faccia il resto per avere gli sfiancamenti e le spinte relative de' cunei, si vedrà manifestamente la necessità di una sopraccentina che sostenga gli sfiancamenti medesimi; ed in oltre che da F in N e da F in O partiranno due serie di spinte relative, delle quali le prime termineranno all' impostatura, le altre al serraglio della cupola. Ciò accaderà in ogni spicchio, sicchè il serraglio resterà in equilibrio fra l' ugual contrasto delle spinte relative de' cunei ad esso contigui e le ammorzerà. Anzi integrando la differenza fra le pressioni di due cunei contigui, s' avrà per l' ultima citata proposizione e suo corollario 2 la spinta relativa di

ciascun cuneo da F in N (non eccettuata quella della mossa, perchè l' impostatura è orizzontale) $= \int \left(\frac{3edx}{b} \sqrt{(2bx - x^2)} - \frac{bedx}{\sqrt{(2bx - x^2)}} \right)$: ma per non errare nell' integrazione di essa quantità, converrà far uso di qualche artifizio analitico, imperciocchè la spinta del cuneo in F corrispondente al punto Q è $= 0$, laddove l'origine dell'ascisse x è in O non in Q. Si prenda dunque essa origine in Q facendo la $QZ = z$, e cada il punto Z sotto Q, e si ordini la ZV: s' avrà $x = q + z$, $dx = dz$, poi fatte le sostituzioni la quantità integrale si cangierà in questa nuova $\int \left(\frac{3edz}{b} \sqrt{(2b(q+z) - (q+z)^2)} - \frac{bedz}{\sqrt{(2b(q+z) - (q+z)^2)}} \right)$: ma $\sqrt{(2b(q+z) - (q+z)^2)}$ è uguale all' ordinata ZV, $\int dz \sqrt{(2b(q+z) - (q+z)^2)}$ è uguale allo spazio $QFVZ$, e $\int \frac{bdz}{\sqrt{(2b(q+z) - (q+z)^2)}}$ uguale all' arco FV; laonde l' integrale ricercato, senza aggiugnere la costante perchè quando $z = 0$ tutto svanisce, diventerà $= \frac{3e}{b} . QFVZ - e . FV$; e però la spinta relativa della mossa sarà $= \frac{3e}{b} . QFNI - e . FN$. Conseguentemente se si prenda dalla parte dell' ascisse negative la $QT = z$, e si ordini TS, riuscirà la spinta negativa del cuneo in $S = \frac{3e}{b} . QFST - e . FS$; sicchè, cangiando i segni, sarà la spinta di esso cuneo tolta positivamente $= - \frac{3e}{b} . QFST + e . FS$; e quella del cuneo in O contiguo al serraglio $= - \frac{3e}{b} . QFO + e . OF$.

E' costume di mettere nella sommità delle cupole una lanterna per dar ornamento e lume all' interiore della Vol-

ta. Queste lanterne pertanto riescono anche utili per la fermezza della cupola, imperciocchè per le cose dimostrate essendovi ne' cunei superiori al punto F una tendenza di forze verso la sommità, può essere ella ammorzata dalla pressione contraria della lanterna. E chi non vede che per ottenere un perfetto equilibrio in tutti i cunei da F in su, basta che s' appoggi la lanterna su' cunei che restano i sommi, sì che la sua pressione sopra ogni cuneo equivalga a quella spinta relativa che ad esso compete, e che poco fa abbiamo determinata? Si supponga che ciò sia così: resta dunque da calcolare l' effetto de' cunei da F in N, ne' quali accadono sfiancamenti, che bisognerà intendere sostenuti da una sopraccentina.

Ora procedendo nella stessa maniera della proposizione 5 del Lib. V, si proverà, ch' essendo orizzontale l' impostatura, la somma de' momenti degli sfiancamenti de' cunei da F in N col momento della spinta relativa della mossa (la qual somma rinchiude i momenti di tutte le forze che operano sul muro) è uguale alla somma o all' integrale de' momenti delle differenze fra le pressioni di due cunei contigui; dunque saranno i momenti di tutte le forze che operano sul

Prop. ant. muro uguali a $\int\left(\frac{3edx}{b}\sqrt{(2bx-x^2)}-\frac{bedx}{\sqrt{(2bx-x^2)}}\right).\left(k+\frac{a(b-x)}{b}-\frac{G+b}{b}\sqrt{(2bx-x^2)}\right)$, coll' avvertenza poi che questa quantità integrale svanisca nel cuneo F corrispondente al punto Q. Per far questo adopreremo l' anteriore artifizio prendendo sotto il punto Q la $QZ=z$, e ordinando la ZV, indi sostituendo in luogo di x il binomio $q+z$, e dz in luogo di dx nella quantità integrale; e sarà la somma de' momenti fino in $V=\int\left(\frac{3cdz}{b}\sqrt{(2b(q+z)-(q+z)^2)}-\frac{bcdz}{\sqrt{(2b(q+z)-(q+z)^2)}}\right).\left(k+\frac{a(b-q-z)}{b}-\frac{G+b}{b}\sqrt{(2b(q+z)-(q+z)^2)}\right)$; onde fatta la moltiplicazione é l' integrazione di termine per termine, e aggiunta la costante E, riuscirà

rà eſſa ſomma de' momenti fino in $V = \frac{3ek}{b}\cdot QFVZ - ek\cdot FV + \frac{ea}{b^2}\cdot(ZV)^3 - ea\cdot ZV - \frac{3e(G+b)}{b^2}\cdot\left(2bqz + bz^2 - \frac{1}{3}(q+z)^3\right) + ez(G+b) + E$. In oltre perchè nel cuneo F corriſpondente al punto Q o all' aſciſſa $z = 0$, tutto dee ſvanire, e quando $z = 0$, ZV ſi cangia in QF che abbiamo in principio chiamata $= b$; e però ſarà la coſtante $E = -\frac{eab^3}{b^2} + eab - \frac{eq^3(G+b)}{b^2}$: quindi fatta $z = QI = b - q$, e la $ZV = IN = b$, s' avrà la ſomma de' momenti da F in $N = \frac{3ek}{b}\cdot QFNI - ek\cdot FN + eab - \frac{eab^3}{b^2} - \frac{eq^3(G+b)}{b^2} - \frac{3e(G+b)}{b^2}\cdot\frac{2b^3 - 3bq^2}{3} + e(b - q)\cdot(G+b) = \frac{3ek}{b}\cdot QFNI - ek\cdot FN + eab - \frac{eab^3}{b^2} - e(q^3 + b^3 - 3bq^2 + b^2q)\cdot\frac{G+b}{b^2}$. Per ſemplificare ancora di più ſiffatto valore chiamo il quadrante ON del raggio b uguale a Θ, e richiamo alla memoria che abbiamo in principio fatto l' arco $OF = l$, e che q è $= b - b\sqrt{\frac{2}{3}}$: ſarà dunque $\frac{3ek}{b}\cdot QFNI - ek\cdot FN = \frac{3ek}{b}(ONI - OFI + QFI) - ek(ON - OF) = \frac{3ek}{b}\cdot\left(\frac{b\Theta}{2} - \frac{bl}{2} + \frac{b(b-q)}{2}\right) - ek(\Theta - l) = \frac{ek\Theta}{2} - \frac{ekl}{2} + \frac{3ebk(b-q)}{2b}$; ma $q^3 + b^3 - 3bq^2 + b^2q$ riuſcirà $= 2(b - q)^3$, come ſi può riſcontrare; laonde ſarà la ſomma de' momenti delle forze de' cunei che operano contro il muro, ch' era la coſa domandata dalla propoſizione, $= \frac{ek\Theta}{2} - \frac{ekl}{2} + \frac{3ebk(b-q)}{2b} + eab - \frac{eab^3}{b^2} - 2e(b-q)^3\cdot\frac{G+b}{b^2}$, e ſoſtituendo in luogo di e il

ſuo valore $\frac{u(c^3 - b^3)}{3b^2}$, riuſcirà finalmente $= \frac{u(c^3 - b^3)}{3b^2} \cdot \Big(\frac{k(\Theta - l)}{2} + \frac{3bk(b-q)}{2b} + ab - \frac{ab^3}{b^2} - 2(b-q)^3 \cdot \frac{G+b}{b^2} \Big)$; il che ecc.

PROBLEMA 17. PROPOSIZIONE 17.

Dati i raggi interiore ed eſteriore di una cupola compreſa fra le ſuperficie di due emisferi concentrici, e data l' altezza del muro del tamburo, ritrovare la groſſezza ch' ei debbe avere.

Fig. IX. Tav. VI. Sia il raggio interiore $= b$, l' eſteriore $= c$, l' altezza del tamburo $= a$, la ſua groſſezza $= G$, P il peſo in libbre di un piè cubo del materiale della Volta, R la coerenza aſſoluta di un piè quadrato. Sia in oltre FR un pezzo del tamburo corriſpondente a uno ſpicchio della cupola, e l' arco orizzontale AF ſi chiami come nell' antecedente $= u$, il quadrante $= \Theta$; dunque ſe ſi faccia $\frac{3b^3}{4(c^2 + bc + b^2)} + \frac{3c}{4} = k$, dipoi ſi prenda $\frac{1835}{10000} b = q$, $\frac{5773}{10000} b = b$, e $\frac{6155}{10000} b = l$, ſarà la ſomma de' momenti delle forze contro il muro del tamburo $= \frac{Pu(c^3 - b^3)}{3b^2} \cdot$
Prop. ant. $\Big(\frac{k(\Theta - l)}{2} + \frac{3bk(b-q)}{2b} + ab - \frac{ab^3}{b^2} - 2(b-q)^3 \cdot \frac{G+b}{b^2} \Big)$. Di nuovo è manifeſto che FR è un priſma che ha per altezza la AD, e per baſe lo ſpazio $CRDL$ compreſo fra gli archi concentrici CR LD, e le rette linee CL RD concorrenti nel centro B, che corriſponde verticalmente al centro E della cupola; laonde condotta dal centro di gravità G dello ſpazio $CRDL$ la verticale GT, paſſerà queſta anche pel punto S centro di gravità del priſma FR.

Per il che fatta la groſſezza DR del muro $= G$, eſſendo $BD = b$, $BR = BO = b + G$, e l' arco $AF = DL = u$, ſarà la

distanza BG dal punto B al centro di gravità G dello spazio $CRDL = \frac{6b^2 + 6bG + 2G^2}{3(2b + G)} \cdot \frac{2.\text{sen.}\frac{u}{2}}{u}$; ovvero perchè l' arco u, e molto più $\frac{u}{2}$ è sempre piccolissimo, avvegnachè molti sono sempre gli spicchi che compongono la cupola, sarà la $BG = \frac{6b^2 + 6bG + 2G^2}{3(2b + G)}$. Chi non volesse far siffatta supposizione, l' ommetta, poi segua il calcolo. Dunque la rimanente $OG = b + G - \frac{6b^2 + 6bG + 2G^2}{3(2b + G)} = \frac{3bG + G^2}{3(2b + G)}$. Di nuovo poichè $DL = u$, sarà lo spazio $CRDL$, come uguale alla differenza de' due settori CBR LBD, uguale pure a $\frac{u(b + G)}{b} \cdot \frac{b + G}{2} - \frac{bu}{2} = \frac{u(2bG + G^2)}{2b}$; per conseguenza il prisma $FR = \frac{\alpha u(2bG + G^2)}{2b}$, e il momento della resistenza del suo peso ridotto a libbre $= P \cdot \frac{\alpha u(2bG + G^2)}{2b} \cdot \frac{3bG + G^2}{3(2b + G)} = \frac{\alpha Pu(3bG^2 + G^3)}{6b}$.

Corol. 2 Prop. 9 Lib. I.

Si ha in oltre il momento della coerenza della sezione $CRDL = R \cdot \frac{u(2bG + G^2)}{2b} \cdot \frac{3bG + G^2}{3(2b + G)} = \frac{Ru(3bG^2 + G^3)}{6b}$; quindi la totale resistenza del prisma FR riuscirà $= \frac{1}{6b}(\alpha Pu + Ru) \cdot (3bG^2 + G^3)$; dunque dovendo esservi equilibrio tra i momenti delle forze che operano contro il muro, e i momenti delle forze resistenti, s' avrà l' equazione del terzo grado $\frac{Pu(c^3 - b^3)}{3b^2} \cdot \left(\frac{k(\Theta - l)}{2} + \frac{3bk(b - q)}{2b} + \alpha b - \frac{\alpha b^3}{b^2} - 2(b - q)^2 \cdot \frac{G + b}{b^2}\right) = \frac{1}{6b}(\alpha Pu + Ru) \cdot (3bG^2 + G^3)$, cioè $2P(c^3 - b^3)$.

Dom. II. di questo

$\left(\frac{k(\Theta - l)}{2} + \frac{3bk(b-q)}{2b} + ab - \frac{ab^3}{b^2} - 2(b-q)^2 . \frac{G+b}{b^2}\right) =$ $(abP + bR).(3bG^2 + G^3)$, in cui tutto è cognito eccetto che G; laonde essa risoluta co' metodi noti, si avrà il valor di G, o la grossezza ricercata della muraglia; il che ecc.

Corollario.

Scol. Prop. 1 di questo

Passiamo ad un esempio. Sia il raggio interiore b della cupola di piedi 14, l' esteriore c di piedi 16, il peso P di un piè cubo del materiale = lib. 180, R = lib. 1769, l' altezza a della muraglia = 15. Sarà per conseguenza $\frac{1835}{10000} b$ $= \frac{2569}{1000} = q$, $\frac{5773}{10000} b = \frac{8082}{1000} = b$, $\frac{6155}{10000} b = \frac{8617}{1000} = l$, Θ $= 22$, $\Theta - l = \frac{13383}{1000}$, $b - q = \frac{11431}{1000}$, $c^3 - b^3 = 1352$, la distanza k dal centro della cupola al centro di gravità di un cuneo $= \frac{3b^3}{4(c^2 + bc + b^2)} + \frac{3c}{4} = \frac{15044}{1000}$, e per fine $abP +$ $bR = 15.14.180 + 14.1769 = 62566$. Sicchè sostituendo questi valori nella finale equazione della proposizione s' avrà

$$360 . 1352 \left(\frac{15044.13383}{2.1000^2} + \frac{3.8082.15044.11431}{28.1000^3} + \frac{15.8082}{1000} - \frac{15.8082^2}{14^2.1000^3} - \frac{2.11431^2.G}{14^2.1000^3} - \frac{2.11431^2}{14.1000^3}\right) = 62566(42G^2 + G^3);$$

e però fatta $G = \frac{y}{12}$ per avere la ricercata grossezza in pollici, e moltiplicando tutto per $\frac{12^3}{62566}$, ci ridurremo a questa equazione

$$\frac{360.1352.12^3}{62566} . \left(\frac{15044.13383}{2.1000^2} + \frac{3.8082.15044.11431}{28.1000^3} + \frac{15.8082}{1000} - \frac{15.8082^2}{14^2.1000^3} - \frac{2.11431^2.y}{14^2.1000^3.12} - \frac{2.11431^2}{14.1000^3}\right) =$$

$42.12y^2 + y^3$; quindi fatte le moltiplicazioni nel primo mem-

bro col mezzo de' logaritmi se ne avrà un'altra $1353229 + 2001770 + 1629651 - 543095 - 17074y - 2868397 = 504y^2 + y^3$, ovvero riducendo $1573158 - 17074y = 504y^2 + y^3$, la di cui radice positiva è prossimamente uguale a 40 pollici, e però $G = \frac{y}{12} =$ piedi 3 e pollici 4; ch'è la grossezza, che la pratica insegna di dare al tamburo di una Volta di tali dimensioni.

SCOLIO I.

Ho trattato del caso più semplice delle cupole, cioè di quelle comprese fra le superficie di due emisferi concentrici e che però hanno una grossezza uniforme; non sarebbe però difficile applicare il metodo anche a quelle che sono meno grosse nella sommità che nell' impostature, come sogliono fabbricarle gli Architetti, e ciò pure se la curva interiore o l' esteriore, ovvero amendue non fossero superficie di sfera. E siccome abbiamo fatto per le Volte a mezza botte, così per le cupole si potrebbe calcolare l' effetto che producono i pesi soprapposti, qualunque fosse la natura della curva a cui terminassero.

SCOLIO 2.

La Teoria, che abbiamo applicata in questo Libro alle Volte a mezza botte e alle cupole affine di determinare il loro sforzo contro alle muraglie, può di leggieri applicarsi anche a qualsivoglia altra forma di Volte. Consiste la principal operazione nel ricercare la differenza fra le pressioni reciproche ch' esercitano due cunei contigui fra loro, senza computar le pressioni che soffrono dagli altri; poi il momento di questa differenza d' intorno al centro del moto, indi la somma o l' integrale di essi momenti. Nè si dee ommettere di tener conto delle pressioni che esercitano le moffe da per se stesse sull' impostature, quando queste non siano orizzontali, e nemmeno dell' altre avvertenze indicate in questo Libro, quando peravventura fossero le Volte da qualche scala di pesi caricate.

Il Fine del Sesto ed Ultimo Libro.



ERRORI			CORREZIONI
pag. 199	l. 1	*Quarto*	*Quinto*
200	10	*AZ*	*Az*
	12	*AZ*	*Az*
283	15	a quella	a quella della

Tavola I

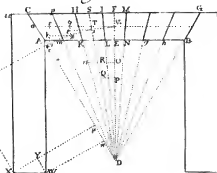


Fig:XIV

Fig:V

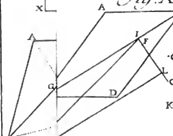


Fig:X

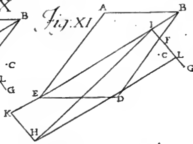


Fig:XI

Fig VI

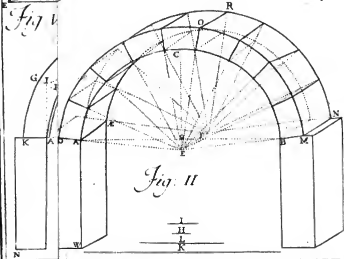


Fig: II



Tavola II

Fig. IX

Fig. IV



Fig. VI

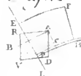


Fig. XI

Fig. XIII

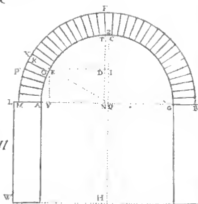




Tavola: III

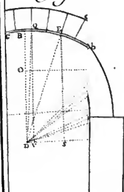


Fig: I

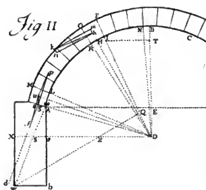


Fig II

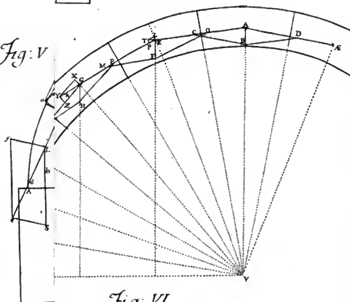
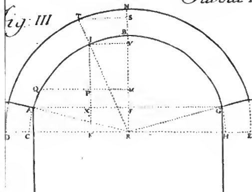


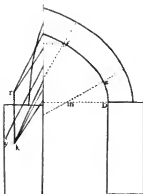
Fig: V

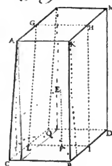
Fig: VI



Tavola IV


Fig: III
T
N
S
B
I
V
Q
P
M
A
X
Y
G
D
C
K
R
H
E




Fig: VIII
M
G
H
A
K
E
Q
D
L
F
I
C
B

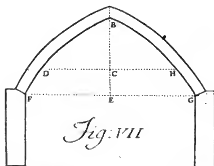
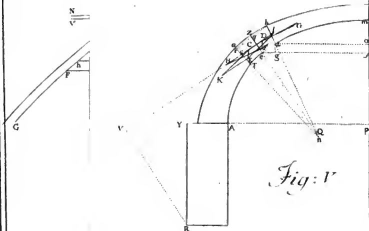
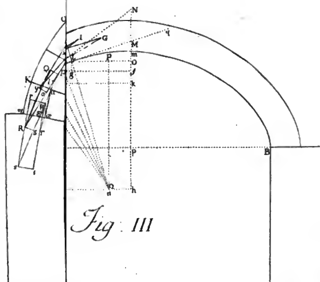

B
D
C
H
F
E
G
Fig: VII



Tavola V







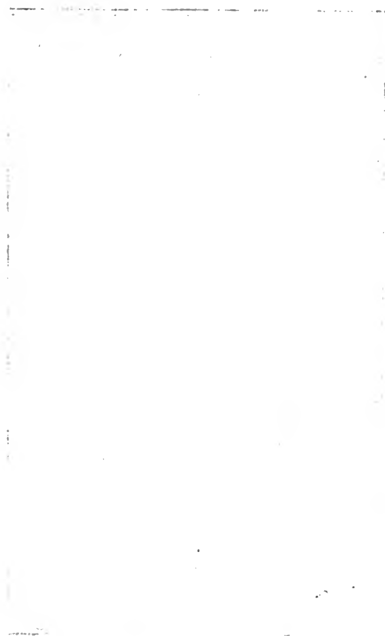
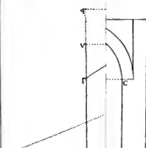
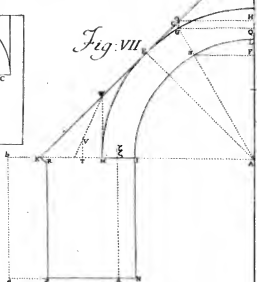
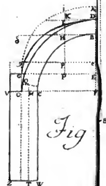
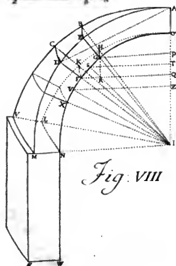


Tavola VI




Fig: VII


Fig


Fig: VIII





